Question 1

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie sur cet espace.

1. Donner la définition de F_X.
2. Donner trois propriétés de F_X de votre choix.

Question 2

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité p_X et de fonction de répartition F_X, définie sur cet espace.

1. Quelle propriété « fondamentale » doit respecter p_X pour être effectivement une densité de probabilité ?
2. Rappeler le lien entre p_X et F_X.
3. Exprimer la probabilité $\mathbf{P}(\{a < X \leqslant b\})$ en fonction de F_X puis en fonction de p_X.

Question 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Rappeler la loi de X.
2. Donner l'espérance et l'écart-type de X.

Question 4

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité p_X admettant une espérance m et une variance σ^2.

1. Exprimer sa variance de deux manières.
2. Rappeler ce que stipule l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Question 5

Soient X et Y deux variables aléatoires de densité conjointe p_{XY} et de densités de probabilité marginales p_X et p_Y.

1. Comment se traduit l'indépendance des deux variables aléatoires au niveau de densités de probabilité ?
2. On pose $Z = X + Y$, que vaut p_Z dans le cas où X et Y sont indépendantes ?

Question 6

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartition conjointe F_{XY} et de fonctions de répartition marginales F_X et F_Y. On note φ_X et φ_Y leurs fonctions caractéristiques respectives.

1. Comment se traduit l'indépendance des deux variables aléatoires au niveau des fonctions de répartition ?
2. On pose $Z = X + Y$, que vaut la fonction caractéristique φ_Z de Z dans le cas où X et Y sont indépendantes ?

Question 7

Soient X et Y deux variables aléatoires.

1. Donner la définition de leur covariance.
2. Donner deux propriétés de la covariance (de votre choix).

Question 8

Soient $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire gaussien, d'espérance $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$.

1. Donnez la densité conjointe de $\mathbf{X}$. (1,5pt)
2. Quelle est la forme de $\mathbf{\Gamma}$ si les composantes de $\mathbf{X}$ sont indépendantes ? (0,5pt)

Question 9

Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux vecteurs aléatoires, et g un changement de vecteur aléatoire tel que $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ admette un nombre dénombrable de solutions $\mathbf{x}_k$ avec $k \in I$.

Donnez l'expression de la densité $p_{\mathbf{Y}}$ de $\mathbf{Y}$ en fonction de $p_{\mathbf{X}}$ celle de $\mathbf{X}$.

Question 10

Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux vecteurs aléatoires gaussiens (dans leur ensemble), et soit $\mathbf{Z}$ le vecteur aléatoire défini par $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$.

1. Donner la définition de la matrice de corrélation de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Que devient cette matrice si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont décorrélés ? (1pt)
2. Donner la définition de la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}$. Comment peut-on écrire cette fonction si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont décorrélés ? (1pt)