

Exercice 8 : Simulation d'une V.A. avec une V.A. uniforme

On considère une variable aléatoire continue X caractérisée par sa densité de probabilité $p_X(x)$. On suppose en outre que $p_X(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que la fonction de répartition F_X de X est strictement croissante. On en déduit alors que F_X est une bijection de \mathbb{R} vers $]0, 1[$. On notera sa réciproque $g = F_X^{-1}$.
2. On considère une variable aléatoire U uniforme sur $]0, 1[$ et l'on construit une nouvelle variable aléatoire Y en posant $Y = g(U)$. Montrez que la densité de probabilité $p_Y(y)$ de Y s'écrit :

$$p_Y(y) = \frac{1}{g'(u)} ,$$

où $u = g^{-1}(y) = F_X(y)$.

3. En utilisant l'expression de la dérivée de la réciproque d'une fonction, montrez que la densité de probabilité de Y est celle de X .
4. Expliquez comment générer informatiquement un tirage aléatoire suivant une densité de probabilité de la forme :

$$p_X(x) = \frac{a}{1+x^2} ,$$

sachant que l'on dispose d'une fonction "*rand*" capable de générer un nombre aléatoire selon une loi uniforme sur $]0, 1[$.