Exercice 7

Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes d'espérances m_X et m_Y, et de variances σ_X^2 et σ_Y^2.

1. $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma^2}\right)$
2. $\mathbb{E}[Z] = am_X + b$ et $\mathbb{V}[Z] = a^2\sigma_X^2$
3. Deux façons de faire : soit utiliser le théorème du changement de variable, soit passer par le fonction caractéristique. Dans le cas où $m_X = 0$ et $\sigma_X^2 = 1$ on a

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right)$$

4. Comme U et V sont indépendantes on a :

$$\langle \mathrm{e}^{i\omega W} \rangle = \langle \mathrm{e}^{i\omega(U+V)} \rangle = \langle \mathrm{e}^{i\omega U} \rangle \langle \mathrm{e}^{i\omega V} \rangle = \mathrm{e}^{-\omega^2\sigma_U^2/2}\mathrm{e}^{-\omega^2\sigma_V^2/2} = \mathrm{e}^{-\omega^2(\sigma_U^2+\sigma_V^2)/2}$$

   d'où le résultat.

5. $$\langle \mathrm{e}^{i\omega F} \rangle = \langle \mathrm{e}^{i\omega(X+Y)/2} \rangle = \langle \mathrm{e}^{i\frac{\omega}{2}X} \rangle \langle \mathrm{e}^{i\frac{\omega}{2}Y} \rangle = \mathrm{e}^{i\omega(m_X+m_Y)/2}\mathrm{e}^{-\omega^2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)/4}$$

   et donc

$$p_F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_F^2}} \exp\left(-\frac{(x-m_F)^2}{2\sigma_F^2}\right)$$

   avec $\sigma_F^2 = (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)/4$ et $m_F = (m_X + m_Y)/2$