Exercice 7

Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes d'espérances m_X et m_Y, et de variances σ_X^2 et σ_Y^2.

1. Donnez l'expression de la densité de probabilité de X.
2. Soit $Z = aX + b$ avec $a \neq 0$. Donnez l'expression de la moyenne et de la variance de Z en fonction de celles de X.
3. Montrez que Z est également gaussienne. Donnez l'expression de sa densité de probabilité dans le cas où X est une VA centrée réduite.
4. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes, de densité de probabilité gaussiennes, de moyenne nulle et de variances σ_U^2 et σ_V^2, montrez que $W = U + V$ est une variable aléatoire de densité de probabilité gaussienne, de moyenne nulle et de variance $\sigma_W^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2$. On rappelle que si Z est une VA gaussienne d'espérance m_Z et de variance σ_Z^2, sa fonction caractéristique est donnée par

$$\tilde{p}_Z(\omega) = \langle \mathrm{e}^{i\omega Z} \rangle = \mathrm{e}^{im_Z\nu} \mathrm{e}^{-\omega^2 \sigma_Z^2/2}$$

5. En déduire la densité de probabilité $p_F(f)$ associée à $F = (X+Y)/2$, en fonction de m_X et m_Y, σ_X^2 et σ_Y^2.