Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires continues indépendantes de densités respectives p_X et p_Y.

Dans cet exercice, on cherchera à déterminer les densité de probabilité p_Z et p_W de

$$Z = \max(X, Y) \text{ et } W = \min(X, Y).$$

1. On commencera par considérer Z.
   (a) Rappelez la définition de la fonction de répartition F_Z.
   (b) Rappelez la relation entre $F_Z(z)$ et $p_Z(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrez que l'événement $\{\max(X, Y) \leqslant z\}$ est équivalent à l'événement $\mathcal{A}$ défini par
   $$\mathcal{A} = \{[(X \leqslant z) \cap (X > Y)] \cup [(Y \leqslant z) \cap (X \leqslant Y)]\}.$$
   (d) Montrez que l'événement précédent $\mathcal{A}$ est équivalent à l'événement $\{(X \leqslant z) \cap (Y \leqslant z)\}$. Vous pourrez vous appuyer si besoin sur une justification graphique.
   (e) Déduisez-en que $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$, pour tout $z \in \mathbb{R}$.
   (f) Déduisez-en, enfin, l'expression de p_Z.
2. On s'intéresse maintenant à W.
   (a) Montrez que
   $$F_W(w) = \mathbb{P}\{(Y \leqslant w) \cap (X > Y)\} + \mathbb{P}\{(X \leqslant w) \cap (X \leqslant Y)\}.$$
   (b) Déduisez-en que
   $$F_W(w) = 1 - \mathbb{P}\{(X > w) \cap (Y > w)\}$$
   et donc que
   $$F_W(w) = F_X(w) + F_Y(w) - F_X(w)F_Y(w).$$
   (c) Donnez alors l'expression de p_W en fonction de p_X, p_Y, F_X et F_Y.
   (d) Que devient cette expression si X et Y suivent toutes les deux des lois exponentielles de paramètre m ?