

Exercice 5 : Couple de VA

Soit (X, Y) un couple de VA continues de densité conjointe p_{XY}

On suppose dans un premier temps que le couple est uniforme sur le domaine

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

1. Donnez l'expression de la densité conjointe p_{XY} .
2. Que valent les densités marginales de X et de Y ?
3. Les VA X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez. Si ce n'est pas le cas, avec quelle(s) condition(s) sur \mathcal{C} l'auraient-elles été ?

On suppose maintenant que X et Y suivent des lois normales centrées réduites indépendantes.

1. Rappelez l'expression de la loi de X .
2. Soit R une VA définie par $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Donnez l'expression de la densité de probabilité p_R en fonction de p_{XY} .
3. Déduisez-en que p_R est de la forme :

$$p_R(r) = H(r)r \exp(-r^2/2) \quad \text{où } H \text{ est la fonction d'Heaviside.}$$

Il s'agit d'une loi de Rayleigh de paramètre 1.

4. On définit maintenant la VA T par $T = \tan^{-1}(Y/X)$. On limite le domaine de valeurs de T à $] -\pi/2, \pi/2[$. Montrez que p_T suit une loi uniforme dont vous préciserez les paramètres.
Rappel : Soit une fonction f . Si f^{-1} existe et si f est dérivable en un point x_0 et si $f'(x_0)$ est non nul, alors f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = 1/[f'(f^{-1}(y_0))]$.
5. Qu'en serait-il sur le domaine $]\pi/2, 3\pi/2[$?
6. En vous appuyant sur les questions précédentes que pouvez-vous dire de la VA définie par $Z = X + iY$?