Exercice 4 : correction

Soient X et Y deux variables aléatoires continues indépendantes et a un réel strictement supérieur à 1. On pose $Z = aX + Y$. On pose $\mathbb{E}[X] = m_X,\ \mathbb{V}[X] = \sigma_X^2,\ $ et $\ \mathbb{E}[Y] = m_Y,\ \mathbb{V}[Y] = \sigma_Y^2$

1. $\mathbb{E}[Z] = am_X + m_Y$ et $\mathbb{V}[Z] = a^2\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2a\mathbb{C}\text{ov}[X,Y] = a^2\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ si X et Y sont indépendantes.
2. On a par définition
$$p_X(x) = \frac{1}{A}\text{rect}\left(\frac{x}{A}\right) \text{ et } p_Y(y) = \frac{1}{B}\text{rect}\left(\frac{y}{B}\right)$$
où rect est la fonction porte de largeur et hauteur égales à 1 centrée en $1/2$.
3. Selon le théorème du changement de VA appliqué à $g(x) = ax$, on a instantanément :
$$p_U(u) = \frac{p_X(u/a)}{|g'(u/a)|} = \frac{p_X(u/a)}{a} = \frac{1}{aA}\text{rect}\left(\frac{u}{aA}\right)$$
4. Par construction, X et Y sont indépendantes. On a donc $p_Z(z) = (p_U * p_Y)(z)$. La densité de Z est donc la convolution de deux fonctions portes de largeurs différentes donc ici un un trapèze.