Exercice 3 bis : Variable aléatoire $Y = aX^2$

Soit une variable aléatoire continue X. On note $p_X(x)$ sa densité de probabilité.

On introduit la variable aléatoire $Y = g(X)$ où g est la fonction qui à x associe $g(x) = ax^2$, où $a > 0$.

1. Par définition de g, on ne peut avoir que $y = ax^2 \geqslant 0$. Donc si $y < 0$, l'événement $\{Y \leqslant y\}$ est impossible et donc de probabilité nulle.
2. Par définition de g, on a :
$$\{Y \leqslant y\} = \{aX^2 \leqslant y\} = \{-\sqrt{y/a} \leqslant X \leqslant \sqrt{y/a}\}$$
3. Selon la question 1., on a directement que $\mathbb{P}[\{Y \leqslant y\}] = 0$ si $y < 0$ et selon la question 2, on a
$$F_Y(y) = \mathbb{P}[\{-\sqrt{y/a} \leqslant X \leqslant \sqrt{y/a}\}]$$
et donc selon le cours
$$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)$$
4. En dérivant l'expression de la question précédente, on a :
$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}} p_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{ay}} p_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)$$
si $y \geqslant 0$ et $p_Y(y) = 0$ sinon.
5. On peut appliquer directement le théorème du changement de VA sur les deux antécédents x_1 et x_2 de y par g. On a alors :
$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{p_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$
où $x_1 = -\sqrt{y/a}$ et $x_2 = \sqrt{y/a}$ et $g'(x) = 2ax$. Ce qui permet d'obtenir le même résultat que précédemment.

On considère une résistance R. On note U la tension à ses bornes et $W = U^2/R$ la puissance qu'elle dissipe. On suppose que U est une variable aléatoire continue centrée de variance σ^2 et de densité p_U. On suppose que W est aussi une variable aléatoire continue de densité p_W.

1. $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[U^2]/R = \sigma^2/R$ car $\mathbb{E}[U] = 0$.
2. $\mathbb{E}[W] = \int w p_W(w) \mathrm{d}w$
3. $\mathbb{E}[W] = \int \frac{u^2}{R} p_U(u) \mathrm{d}u$
4. $p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)$
5. On applique le résultat de la question 5 de la partie précédente avec $a = 1/R$:
$$p_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{w/R}} p_U\left(\sqrt{wR}\right) + \frac{1}{2\sqrt{w/R}} p_U\left(-\sqrt{wR}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 w/R}} \exp\left(-\frac{wR}{2\sigma^2}\right)$$
si $w \geqslant 0$ et $p_W(w) = 0$ sinon.
6. $$\mathbb{E}[W] = \int \frac{u^2}{R} p_U(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{R} \int u^2 p_U(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{R}\sigma^2$$
par définition de la variance de U.
$$\mathbb{E}[W] = \int w p_W(w) \mathrm{d}w = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{wR}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{wR}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}w$$
En posant le changement de variable $u = \sqrt{wR}$ on retrouve
$$\mathbb{E}[W] = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \frac{\mathrm{d}u}{R} = \int \frac{u^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \frac{\mathrm{d}u}{R} = \frac{\sigma^2}{R}$$
On a donc bien le même résultat dans les trois cas.

7. On suppose dans un premier temps que la tension U ne peut prendre que des valeurs comprises entre $+5$ volts et $+10$ volts et que sa densité de probabilité est uniforme entre ces deux valeurs.

   (a) Dessinez une fonction porte entre 5 et 10 V, centrée en 7,5 V et de hauteur 1/5.

   (b) On a par définition de U que $\mathbb{P}[\{U < 5\}] = 0$ et que un tension de 5V équivaut à une puissance de $w = 5^2/1000 = 25\times 10^{-3}$. De même, un tension de 10 V équivaut à une puissance de $w = 100\times 10^{-3}$ avec $\mathbb{P}[\{U > 10\}] = 0$. On a donc que la probabilité d'avoir W plus petite que 25×10^{-3} ou plus grande que 100×10^{-3} est nulle, d'où le résultat demandé.

   (c) Pour $25 \leqslant w \leqslant 100$ milliwatts, on a toujours la formule de la question 5 qui s'applique :

$$p_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{w/R}} p_U\left(\sqrt{wR}\right) + \frac{1}{2\sqrt{w/R}} p_U\left(-\sqrt{wR}\right)$$

   mais cette fois-ci avec une loi uniforme, donc

$$p_W(w) = \frac{1}{10\sqrt{w/R}}$$