

Exercice 3 bis : Variable aléatoire $Y = aX^2$

Soit une variable aléatoire continue X . On note $p_X(x)$ sa densité de probabilité.

On introduit la variable aléatoire $Y = g(X)$ où g est la fonction qui à x associe $g(x) = ax^2$, où $a > 0$.

1. Montrez que si $y < 0$, alors que l'événement $\{Y \leq y\}$ est l'événement impossible.
2. Montrez que si $y \geq 0$, alors que :

$$\{Y \leq y\} = \left\{ -\sqrt{\frac{y}{a}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y}{a}} \right\}$$

3. En déduire que pour tout $y < 0$ $F_Y(y) = 0$ et que pour tout $y \geq 0$:

$$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)$$

4. En déduire $p_Y(y)$.
5. Vérifiez que l'on a bien :

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{p_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

où x_1 et x_2 sont les racines de l'équation $g(x) = y$ pour la valeur de y considérée.

On considère une résistance R . On note U la tension à ses bornes et $W = U^2/R$ la puissance qu'elle dissipe. On suppose que U est une variable aléatoire continue centrée de variance σ^2 et de densité p_U . On suppose que W est aussi une variable aléatoire continue de densité p_W .

1. Donnez l'expression de l'espérance de W en fonction de R et de σ^2 .
2. Rappelez la définition de l'espérance de W en fonction de p_W .
3. En utilisant la formule du transfert, donnez une autre expression de l'espérance de W mais en fonction de p_U .
4. Dans le cas où U suit une loi normale centrée et de variance σ^2 , donnez l'expression de $p_U(u)$.
5. Donnez l'expression $p_W(w)$ dans ce cas.
6. Calculez alors l'espérance de W selon les trois formules des questions 1, 2 et 3 et vérifiez qu'elles donnent bien le même résultat.
7. On suppose maintenant que $R = 1000\Omega$ et que la tension U ne peut prendre que des valeurs comprises entre +5 volts et +10 volts de manière uniforme
 - (a) Représentez graphiquement la densité de probabilité $p_U(u)$ de la tension, avec les unités adéquates sur les axes.
 - (b) Montrez alors que la densité de probabilité de la puissance, $p_W(w)$, est nulle pour toute valeur de w inférieure à 25 milliwatts ou supérieure à 100 milliwatts.
 - (c) Déterminez $p_W(w)$ pour $25 \leq w \leq 100$ milliwatts.