Exercice 3 : correction

On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. On considère sur cet espace probabilisé une variable aléatoire continue X, qui à tout élément ω de Ω associe le réel $X(\omega)$. On notera p_X la densité de probabilité associée à X. On définit la variable aléatoire $Y = g(X)$ où g est la fonction qui à x associe $g(x)$.

1. $F_X(x) = \mathbb{P}[\{X \leqslant x\}] = \int_{-\infty}^{x} p_X(x)\mathrm{d}x$
2. $F_Y(y) = \mathbb{P}[\{Y \leqslant y\}] = \mathbb{P}[\{g(X) \leqslant y\}]$.

On considère que la fonction g est définie par $g(x) = ax^2$, où $a > 0$.

5. Par définition de g, on ne peut avoir que $y = ax^2 \geqslant 0$. Donc si $y < 0$, l'événement $\{Y \leqslant y\}$ est impossible et donc de probabilité nulle.
6. Par définition de g, on a :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[\{Y \leqslant y\}] = \mathbb{P}[\{aX^2 \leqslant y\}] = \mathbb{P}[\{-\sqrt{y/a} \leqslant X \leqslant \sqrt{y/a}\}]$$

   d'où le résultat.
7. En dérivant l'expression de la question précédente, on a :

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}} p_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{ay}} p_X\left(\sqrt{-\frac{y}{a}}\right)$$

8. On peut appliquer directement le théorème du changement de VA sur les deux antécédents x_1 et x_2 de y par g. On a alors :

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{p_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

   où $x_1 = -\sqrt{y/a}$ et $x_2 = \sqrt{y/a}$ et $g'(x) = 2ax$. Ce qui permet d'obtenir le même résultat que précédemment.

On suppose maintenant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, p_X(x) = Ae^{-Bx^2} \text{ avec } A \text{ et } B > 0, \quad \text{et} \quad g(x) = a + x \text{ avec } a > 0.$$

9. Un changement de variable dans l'intégrale $\int p_X(x)\mathrm{d}x = 1$ permet de trouver que $A\sqrt{\pi} = \sqrt{B}$.
10. $B = 1/(2\sigma^2)$
11. Selon le théorème du changement de VA on a instantanément :

$$p_Y(y) = \frac{p_X(y-a)}{|g'(y-a)|} = \frac{p_X(y-a)}{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$$

   On retrouve ainsi une loi normale d'espérance égale à a et de variance égale à σ^2.