Exercice 3

On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. On considère sur cet espace probabilisé une variable aléatoire continue X, qui à tout élément ω de Ω associe le réel $X(\omega)$. On notera p_X la densité de probabilité associée à X. On définit la variable aléatoire $Y = g(X)$ où g est la fonction qui à x associe $g(x)$.

1. Comment s'exprime la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X en fonction de la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω ? En fonction de la densité de probabilité p_X ?
2. Donnez l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y sous la forme de la probabilité d'un évènement faisant intervenir la VA X.

On considère que la fonction g est définie par $g(x) = ax^2$, où $a > 0$.

5. Expliquez pourquoi si $y < 0$ alors $\mathbb{P}(\{Y \leqslant y\}) = 0$.
6. Montrez que si $y \geqslant 0$, alors :

$$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)$$

7. En déduire l'expression de p_Y en fonction de y, pour tout $y \in \mathbb{R}$.
8. Pouvez-vous donner et appliquer une autre méthode permettant de retrouver le résultat ?

On suppose maintenant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, p_X(x) = Ae^{-Bx^2} \text{ avec } A \text{ et } B > 0, \quad \text{et} \quad g(x) = a + x \text{ avec } a > 0.$$

9. Quelle relation doivent vérifier A et B pour que p_X soit effectivement une densité de probabilité ? On rappelle que

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

10. Que doit valoir B pour que X suive une loi normale centrée et de variance σ^2 ?
11. Montrez que $Y = g(X)$ suit alors une loi normale dont vous donnerez l'espérance et la variance.