Exercice 2 : Correction

En 1777 l'écrivain et naturaliste Georges Leclerc, comte de Buffon, propose une expérience que l'histoire retiendra sous le nom *d'aiguille de Buffon*. L'idée est de lancer une aiguille de longueur ℓ sur un parquet dont les lattes ont une largeur $d \geqslant \ell$ et de déterminer quelle est la probabilité pour que l'aiguille coupe une des rainures du parquet.

Si on note x la coordonnée du centre de l'aiguille entre les deux bords d'une latte et θ son inclinaison par rapport à la direction des lattes, on peut supposer que x et θ peuvent être choisis « au hasard » dans les intervalles $[0, d]$ et $[0, \pi]$, c'est à dire que x et θ définissent deux variables aléatoires uniformes indépendantes X et Θ sur $[0, d] \times [0, \pi]$.

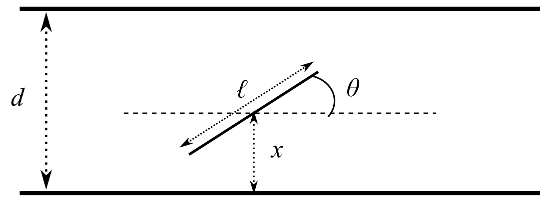

Figure 1 – Schéma de l'expérience

1. Selon les données de l'exercice on a $p_{X,\Theta}(x, \theta) = 1/(\pi d)$ sur $[0, d] \times [0, \pi]$ et est nulle partout ailleurs.
2. C'est un raisonnement géométrique simple sur le triangle formé par l'aiguille et les bords du parquet qui permet de montrer que, pour θ fixé, l'aiguille coupe une rainure du parquet si
$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\ell \sin\theta \quad \text{ou} \quad d - \frac{1}{2}\ell \sin\theta \leqslant x \leqslant d$$
3. Selon précédemment, on a donc pour tout θ
$$p = \mathbb{P}[\{0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\ell \sin\theta\} \cap \{d - \frac{1}{2}\ell \sin\theta \leqslant X \leqslant d\}] = \mathbb{P}[\{0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\ell \sin\theta\}] + \mathbb{P}[\{d - \frac{1}{2}\ell \sin\theta \leqslant X \leqslant d\}]$$
donc par définition de la densité
$$p = \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}\ell \sin\theta} p_{X,\Theta}(x, \theta) \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta + \int_d^\pi \int_{d-\frac{1}{2}\ell \sin\theta}^d p_{X,\Theta}(x, \theta) \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$$
4. On a donc
$$p = \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}\ell \sin\theta} \frac{1}{\pi d} \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta + \int_0^\pi \int_{d-\frac{1}{2}\ell \sin\theta}^d \frac{1}{\pi d} \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi d} \int_0^\pi \frac{1}{2}\ell \sin\theta \mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi d} \int_0^\pi \frac{1}{2}\ell \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\ell/(\pi d)$$

On lance N aiguilles. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre d'aiguilles qui coupent une rainure. On admettra que Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(N, p)$.

5. $\mathbb{E}[Y] = pN = 2N/\pi$ et $\mathbb{V}[Y] = Np(1 - p) = 2N(1 - 2/\pi)/\pi$.
6. La grandeur $2N/\mathbb{E}[Y]$ vaut donc π. Donc si on lance suffisamment d'aiguille pour avoir une bonne approximation de $\mathbb{E}[Y]$, on peut espérer avoir une bonne estimation de π.

On souhaite maintenant connaître le nombre N_π d'aiguilles à lancer pour estimer π avec une précision de $\delta\pi = 10^{-3}$, avec une probabilité d'au moins 99%.

7. On a $\delta p/\delta\pi \approx 2/\pi^2$ d'où $\delta p \approx 2\delta\pi/\pi^2$
8. L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff donne que
$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{Y}{N} - p\right| \geqslant \delta p\right\} \leqslant \frac{\sigma_Y^2}{N^2 \delta p^2}$$
et
$$\frac{\sigma_Y^2}{N^2 \delta p^2} = \frac{2N(1 - 2/\pi)\pi^4}{\pi N^2 4\delta\pi^2} = \frac{\pi^3(1/2 - 1/\pi)}{N\delta\pi^2}$$

9. Or on veut $\frac{\pi^3(1/2-1/\pi)}{N\delta\pi^2} \leqslant 1\%$, d'où $N_\pi \geqslant 5.63 \times 10^8$.

Il faut donc lancer au moins 563 millions pour avoir une bonne approximation de π. L'expérience va être longue...