Exercice 2 : L'aiguille de Buffon

En 1777 l'écrivain et naturaliste Georges Leclerc, comte de Buffon, propose une expérience que l'histoire retiendra sous le nom *d'aiguille de Buffon*. L'idée est de lancer une aiguille de longueur ℓ sur un parquet dont les lattes ont une largeur $d \geqslant \ell$ et de déterminer quelle est la probabilité pour que l'aiguille coupe une des rainures du parquet.

Si on note x la coordonnée du centre de l'aiguille entre les deux bords d'une latte et θ son inclinaison par rapport à la direction des lattes, on peut supposer que x et θ peuvent être choisis « au hasard » dans les intervalles $[0, d]$ et $[0, \pi]$, c'est à dire que x et θ définissent deux variables aléatoires uniformes indépendantes X et Θ sur $[0, d] \times [0, \pi]$.

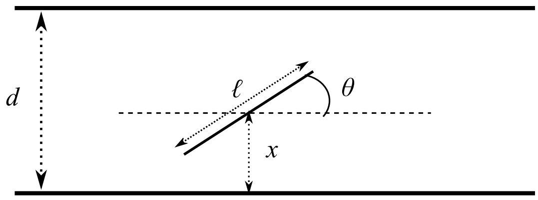

Figure 1 – Schéma de l'expérience

1. Expliquez pourquoi la densité de probabilité conjointe $p_{X,\Theta}$ de X et Θ peut-être supposée uniforme sur un domaine que l'on définira. Donnez alors l'expression de $p_{X,\Theta}$.
2. Montrez que, pour θ fixé, l'aiguille coupe une rainure du parquet si
$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\ell \sin\theta \quad \text{ou} \quad d - \frac{1}{2}\ell \sin\theta \leqslant x \leqslant d.$$
3. Soit p la probabilité de l'événement « L'aiguille coupe une rainure ». En vous appuyant sur la question précédente, exprimez cette probabilité en fonction de $p_{X,\Theta}$.
4. Déduisez-en que $p = 2\ell/(\pi d)$. Dans la suite on supposera que $\ell = d$.

On lance N aiguilles. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre d'aiguilles qui coupent une rainure. On admettra que Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(N, p)$.

5. Que valent l'espérance et la variance de Y ?
6. Déduisez des questions 4 et 5 que cette expérience permet de calculer une estimation du nombre π.

On souhaite maintenant connaître le nombre N_π d'aiguilles à lancer pour estimer π avec une incertitude absolue de $\delta\pi = 10^{-3}$, avec une probabilité d'au moins 99%.

7. On note δp l'incertitude sur p. Montrez que $\delta p \approx 2\delta\pi/\pi^2$.
8. En vous appuyant sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, donnez un majorant de la probabilité
$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{Y}{N} - p\right| \geqslant \delta p\right\}$$
9. Déduisez-en la valeur de N_π sachant que $\pi^3(1/2 - 1/\pi) \approx 5.63$.