Exercice 1 : Correction

1. Selon le cours on a
$$P_{X_1}(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-m_1)^2\right)$$
2. On sait qu'une translation d'une VA revient à juste changer son espérance. Donc la variable $U = X_1 - m_1$ est une VA d'espérance nulle (centrée) et de même variance que X_1. Idem pour V et X_2. Une manière plus propre de répondre est soit d'utiliser le théorème du calcul de la densité de probabilité d'un changement de VA soit de passer par la fonction caractéristique.

On souhaite maintenant calculer le « contraste » entre les deux signaux centrés sous la forme
$$Q = \frac{U-V}{U+V}$$
et on cherche à connaître les propriétés statistiques de la VA Q. On posera $A = U+V$ et $S = U-V$.

4. La somme de deux VA normales indépendantes est une VA normale dont l'espérance est la somme des espérances et la variance la somme des variances.
5. U et V étant deux VA normales indépendantes, on a immédiatement :
$$P_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}a^2\right)$$
6. X_1 et X_2 étant indépendantes, U et V le sont aussi. De plus, en refaisant les mêmes calculs qu'au TD 3 on trouve que
$$p_{_S}(s) = \int p_{(U,V)}(u, u-s)\mathrm{d}u = \int p_{_U}(u)p_{_V}(u-s)\mathrm{d}u = \int p_{_U}(u)p_{_V}(-[s-u])\mathrm{d}u = \int p_{_U}(u)f(s-u)\mathrm{d}u = (p_{_U} * f)(s)$$
avec $f(x) = p_{_V}(-x)$. Autre solution : passer par la fonction caractéristique.
7. Selon les résultats classiques sur la TF et la définition de la fonction caractéristique on a
$$\mathrm{TF}[p_{_S}](\nu) = \mathrm{TF}[p_{_U}](\nu)\mathrm{TF}[f](\nu) = \varphi_U(\nu)\mathrm{TF}[f](\nu)$$
Or
$$\mathrm{TF}[f](\nu) = \int e^{i\nu w} f(w)\mathrm{d}w = \int e^{i\nu w} p_{_V}(-w)\mathrm{d}w = \int e^{i(-\nu)v} p_{_V}(v)\mathrm{d}v = \varphi_V(-\nu)$$
On a donc $\varphi_S(\nu) = \varphi_U(\nu)\varphi_V(-\nu)$ et ainsi, selon l'annexe, $\varphi_S(\nu) = e^{-\sigma_1^2\nu^2/2}e^{-\sigma_2^2\nu^2/2}$. Il vient ainsi
$$P_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}s^2\right)$$
8. Il s'agit des mêmes calculs que le TD3.
9. $\mathbb{E}[AS] = \mathbb{E}[(U+V)(U-V)] = \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[V^2] = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$ et donc
$$\rho_{_{AS}} = \frac{\mathbb{E}[AS]}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}} = \frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$
10. Comme A et S sont des VA normales, pour qu'elles soient indépendantes, il suffit qu'elles soient décorrélées et donc que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
11. Mêmes calculs que le TD3 avec $k = 1$.
12. Il s'agit d'une loi de Cauchy. Q n'admet donc pas de moments d'ordre 1 et 2.