# Exercice 1

Soient $X_1$ et $X_2$ deux VA indépendantes qui suivent des lois normales d'espérances respectives $m_1$ et $m_2$, et de variances respectives $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$.

1. Rappelez l'expression de la densité de probabilité de $X_1$.
2. Justifiez qu'il existe deux VA indépendantes $U$ et $V$ qui suivent des lois normales centrées de variances respectives $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$ telles que

$$X_1 = m_1 + U \quad \text{et} \quad X_2 = m_2 + V.$$

On souhaite maintenant calculer le « contraste » entre les deux signaux centrés sous la forme

$$Q = \frac{U - V}{U + V}$$

et on cherche à connaître les propriétés statistiques de la VA $Q$. On posera $A = U + V$ et $S = U - V$. On appellera $p_{S,A}$ la densité de probabilité conjointe de $A$ et $S$.

4. On dit que la loi normale est stable par la somme, expliquez cette propriété.
5. Utilisez cette propriété pour donner la densité de probabilité de $A$ en fonction de $\sigma_1$ et $\sigma_2$.
6. Montrez que la densité de probabilité de $S$ peut s'écrire sous la forme du produit de convolution

$$p_S(s) = (p_U * f)(s)$$

   où vous exprimerez $f$ en fonction de $p_V$.
7. En déduire la fonction caractéristique de $S$ puis sa densité de probabilité en fonction de $\sigma_1$ et $\sigma_2$.
8. Montrez que la densité de probabilité de $Q$ peut se mettre sous la forme

$$p_Q(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} |a| p_{S,A}(aq, a) \mathrm{d}a.$$

9. Montrez que $\mathbb{E}[AS] = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$ et exprimez le coefficient de corrélation entre $A$ et $S$ en fonction de $\sigma_1$ et $\sigma_2$.
10. En déduire une condition sur $U$ et $V$ pour que $A$ et $S$ soient indépendantes.
11. Montrez que, sous cette condition, la densité de probabilité de $Q$ peut se mettre sous la forme

$$p_Q(q) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{k^2 + q^2}$$

   où vous donnerez la valeur de $k$.
12. Que valent alors les moments d'ordre 1 et 2 de $Q$ ?