Ondes éléctromagnétiques

- Résumé ondes planes
- Polarisation des OEMPH
- Vecteur de Poynting , Energie
- Propagation dans un conducteur , effet de peau
- Réflexion sur un conducteur, ondes stationnaires

Résumé (OEM dans le vide)

Equation d'onde pour E dans le vide $\Rightarrow$ $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases}$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On cherche l'équation satisfaite par E :

on va donc chercher à éliminer le champ B

On obtient :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

On peut faire de même pour B :

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

Résumé (O.E.M.P.H.)

Ca se prononce :Onde ElectroMagnétique Plane Homogène

On considère une onde plane

se propageant suivant la direction (α,β,γ)

On pose $u = t - \left(\dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right)$

On montre que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{\alpha^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Elle satisfait l'équation de propagation si $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Résumé (structure de l'OEMPH)

On considère donc une onde PLANE se propageant suivant une direction ***u*** quelconque

soit $$E\left[x,y,z,t\right]=E\left[0,0,0,t-\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{c}\right)\right] \qquad \vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

Calculons la divergence de E $$\vec{\nabla}.\vec{E}=0 \Longrightarrow \vec{u}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0 \qquad \vec{u}\perp\vec{E}$$

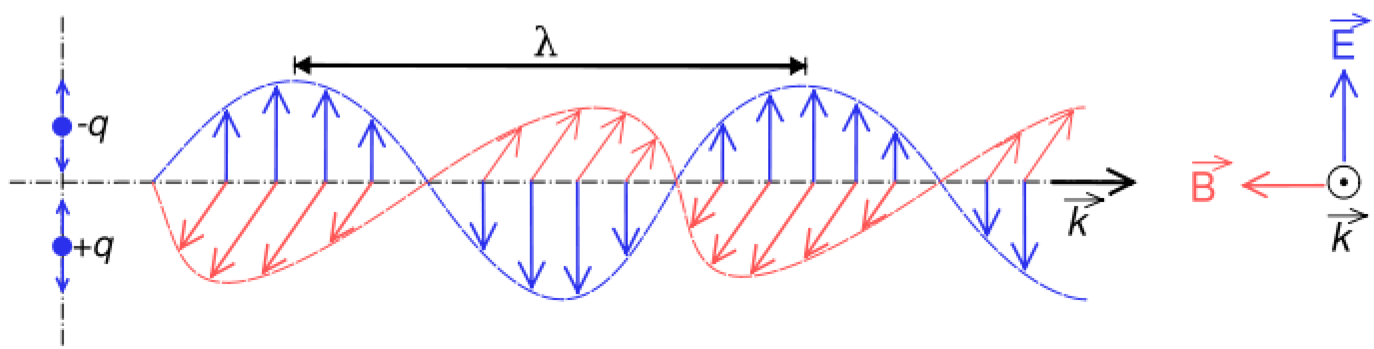
Calculons la divergence de B $$\vec{\nabla}.\vec{B}=0 \Longrightarrow \vec{u}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0 \qquad \vec{u}\perp\vec{B}$$

Calculons le rotationnel de E $$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Longrightarrow \vec{B}=\frac{\vec{u}}{c}\wedge\vec{E}\left\{\begin{array}{l}\vec{B}\perp\vec{u}\\ \vec{B}\perp\vec{E}\end{array}\right.$$

Résumé (structure de l'OEMPH)

On a donc $\vec{u} \perp \vec{E}$ $\vec{u} \perp \vec{B}$ et $\vec{E} \perp \vec{B}$

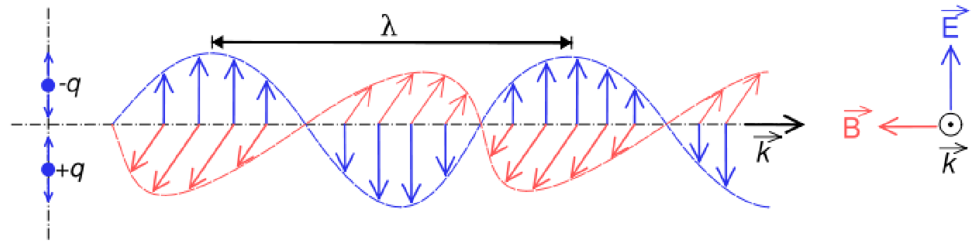
Donc les **champs électrique** et **magnétique** d'une **OEMPH** se propageant dans le **vide** sont TRANSERVAUX et MUTUELLEMENT **orthogonaux** et tels que le **rapport de leurs modules** soit égal à ***c*.**



OEMPH sinusoïdale

De façon générale, pour une onde plane on a : $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \vec{\varphi})$

$$\vec{E}(M,t) = \left| \begin{array}{l} E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_z) \end{array} \right.$$



En notation complexe

$$\vec{E}(M,t) = \left| \begin{array}{l} \widehat{E}_{0x} e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \\ \widehat{E}_{0y} e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \\ \widehat{E}_{0z} e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \end{array} \right.$$

avec $\widehat{E}_{0i} = E_{0i} e^{i\varphi_i}$

OEMPH

On pose $\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = x_3 \end{cases}$ On voit qu'alors $\vec{k}.\vec{r} = \sum_i k_i x_i$

et donc : $\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{E}_j = -ik_i\hat{E}_j$

D'où
$$\vec{\nabla}.\hat{\vec{E}} = -i\vec{k}.\hat{\vec{E}}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \hat{\vec{E}}$$

dans le vide

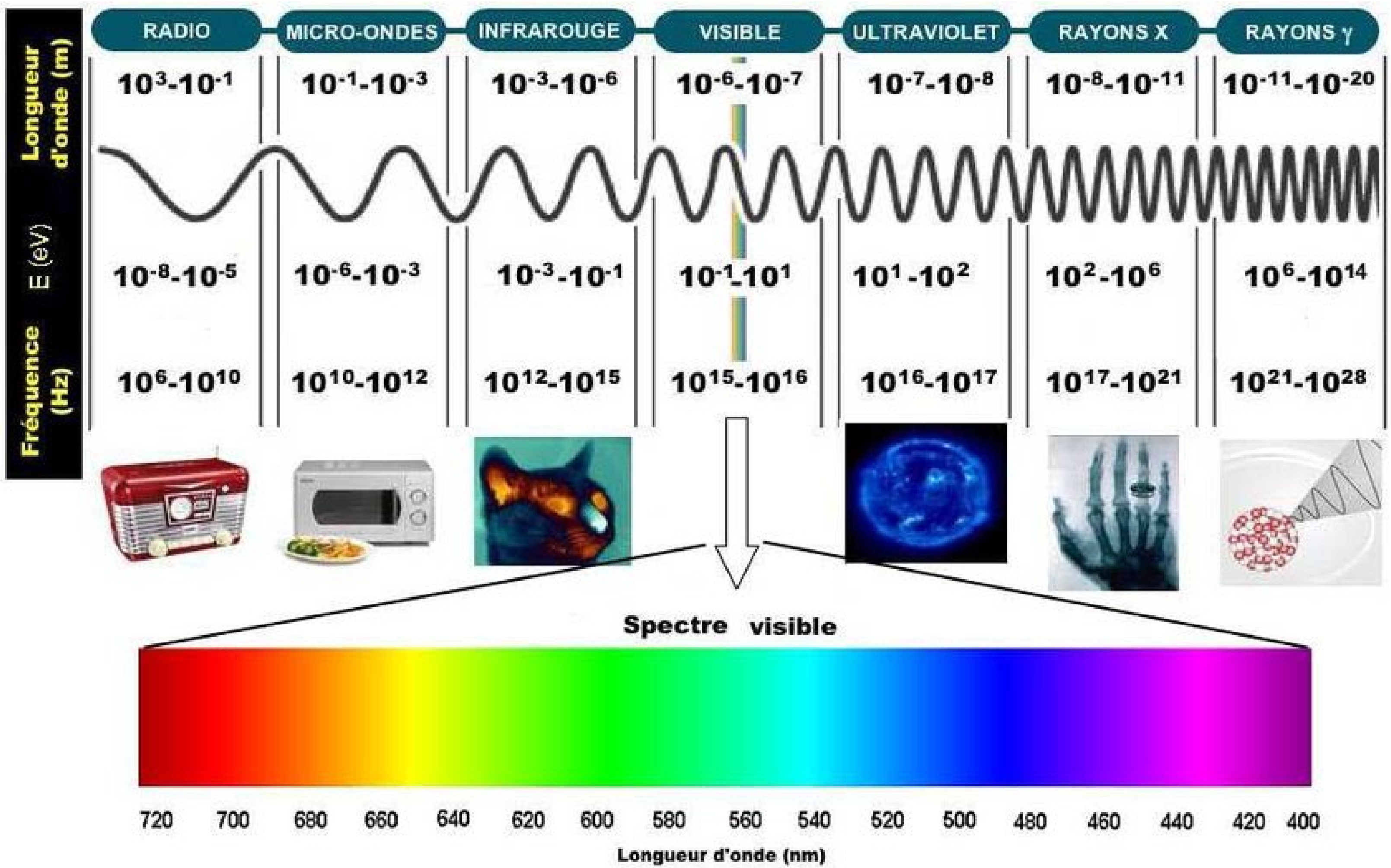
$$\vec{k}.\hat{\vec{E}} = 0$$
$$-i\vec{k} \wedge \hat{\vec{E}} = -i\omega\hat{\vec{B}}$$

$$\vec{k} \perp \hat{\vec{E}}$$
$$\hat{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \hat{\vec{E}}$$

En prenant les parties réelles, on retrouve $\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$

avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$

Spectre électromagnétique



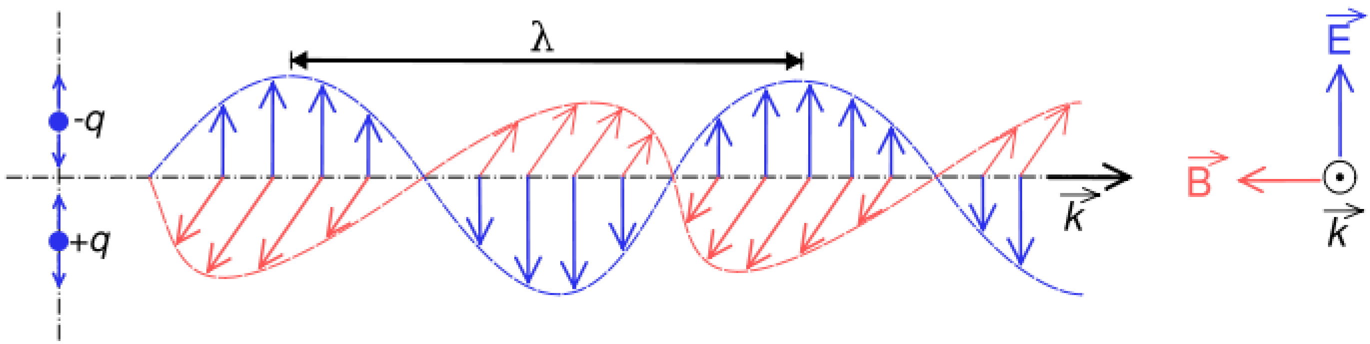
Questions (télécom) : longueur d’onde du wifi, bluetooth, 3,4,5G, communications satellitaires

Polarisation

On s'intéresse aux ondes sinusoïdales (donc monochromatique, cf Fourier)

On considère une onde plane progressive (OPP) se propageant selon Oz

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z$$



Polarisation

$$\vec{E}(M,t) = \left| \begin{array}{c} E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{E}(M,t) = \left| \begin{array}{c} E_{0x} e^{i\varphi_x} e^{i(\omega t - kz)} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{array} \right.$$

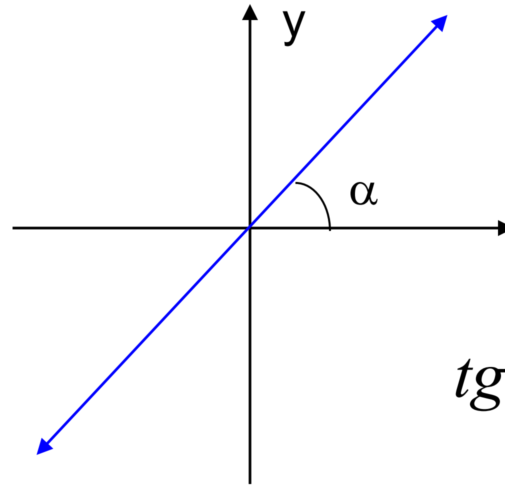
$$\vec{B}(M,t) = \left| \begin{array}{c} -\frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ \frac{E_{0x}}{c}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{B}(M,t) = \left| \begin{array}{c} -\frac{E_{0y}}{c} e^{i\varphi_y} e^{i(\omega t - kz)} \\ \frac{E_{0x}}{c} e^{i\varphi_x} e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{array} \right.$$

La POLARISATION est la direction du vecteur **E**

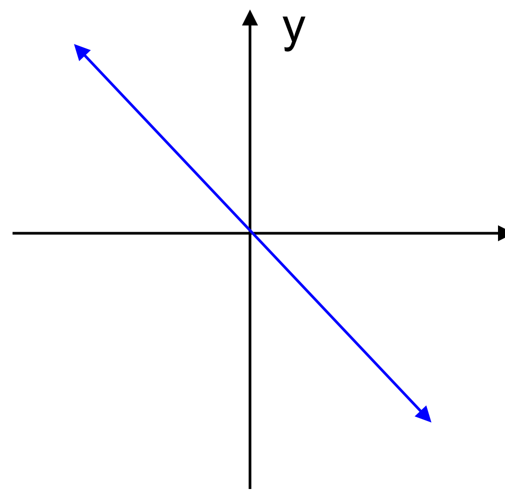
Polarisation

Si $\varphi_y = \varphi_x\,[2\pi]$ on a : $$\frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$



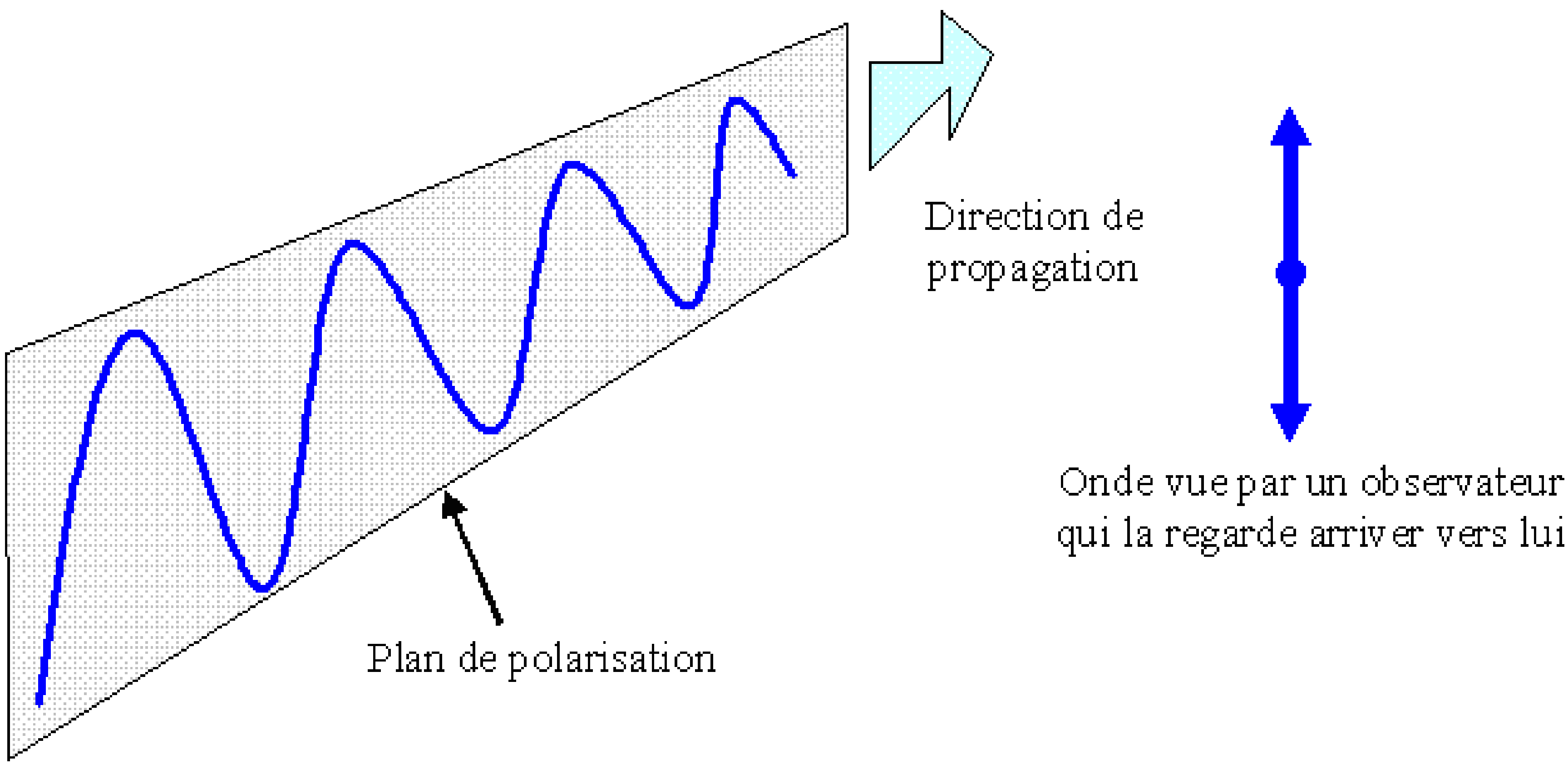
$$tg\alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$

Si $\varphi_y = \varphi_x + \pi\,[2\pi]$ on a : $$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$

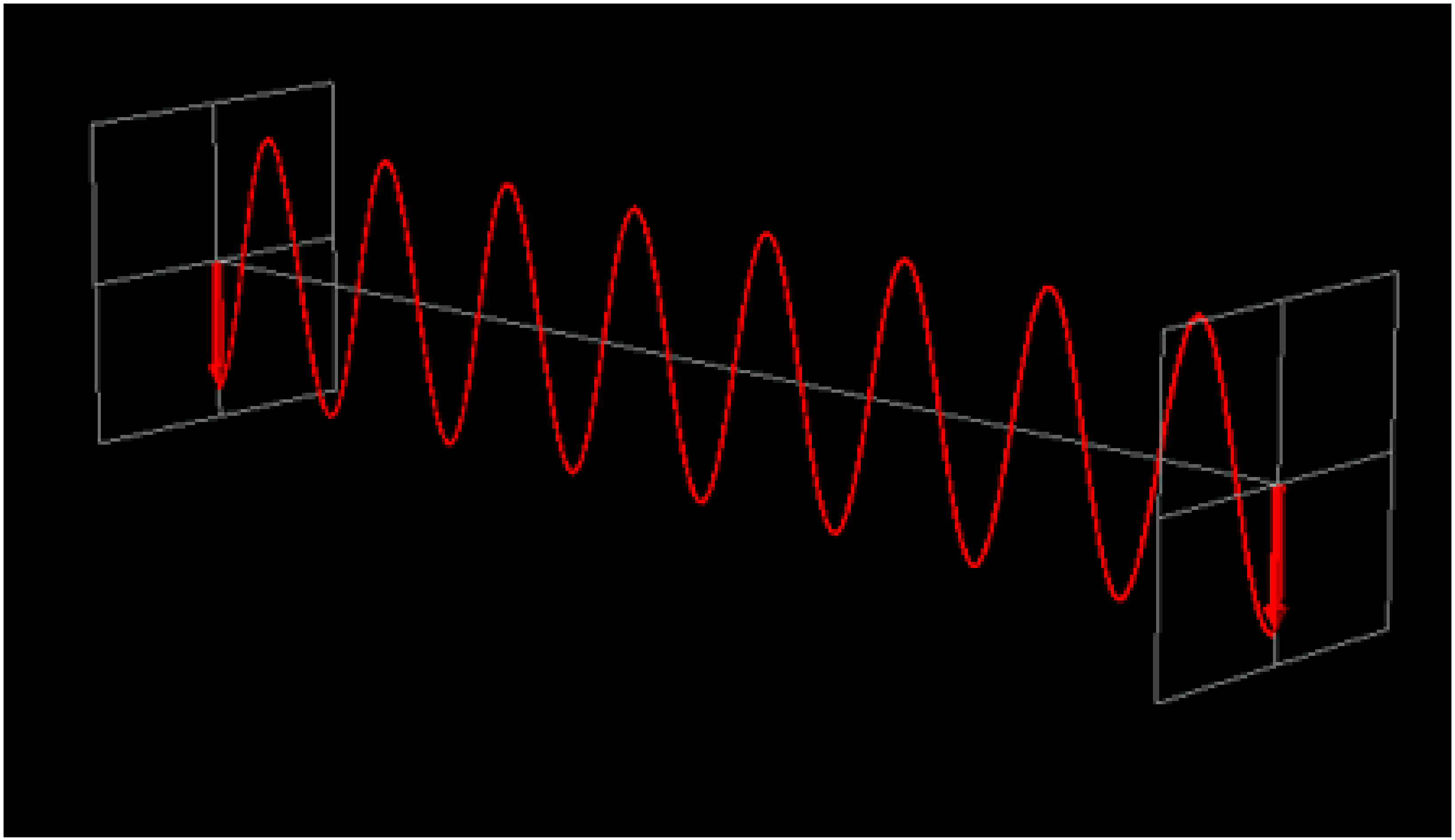


POLARISATION RECTILIGNE

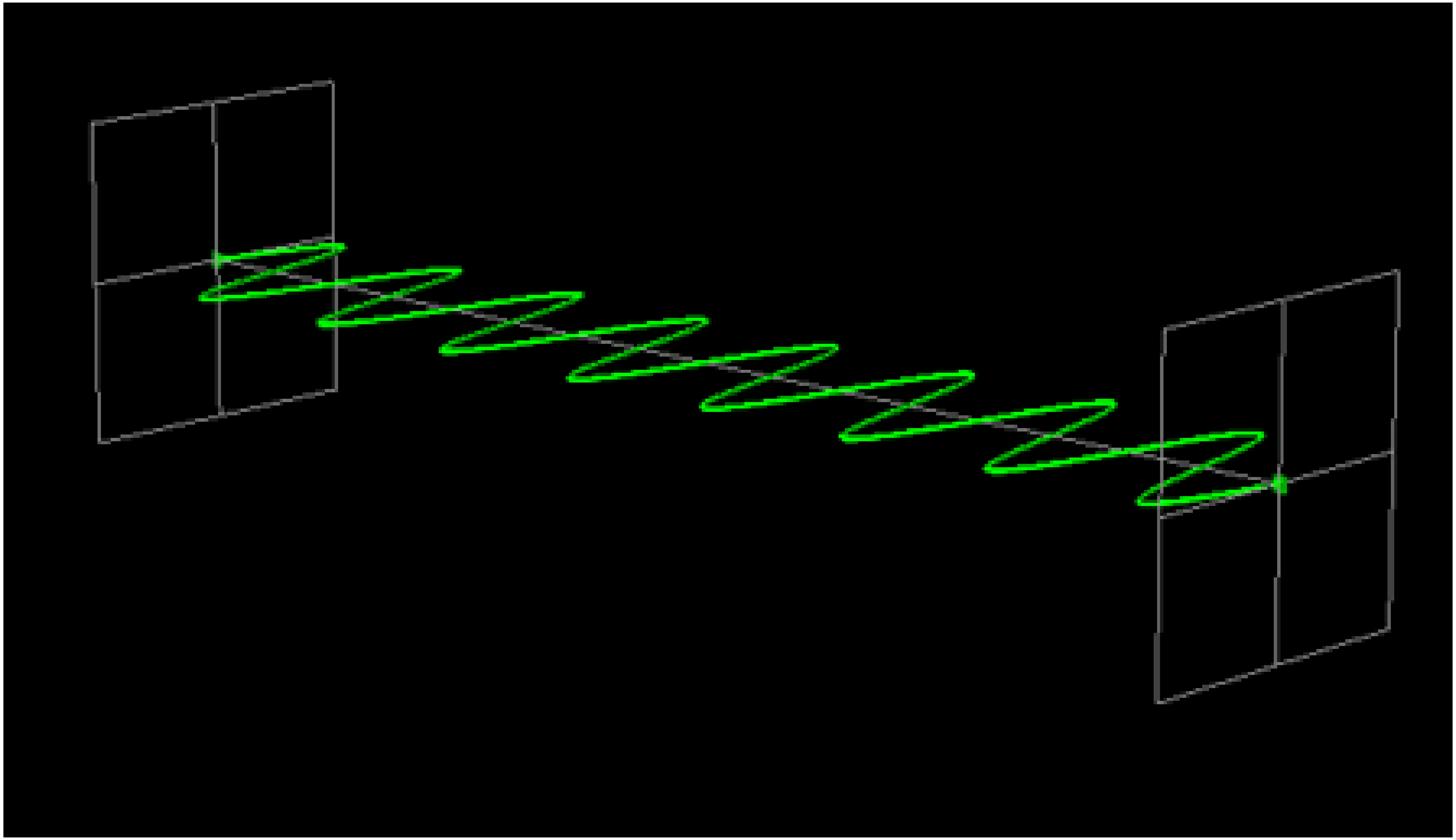
Polarisation rectiligne



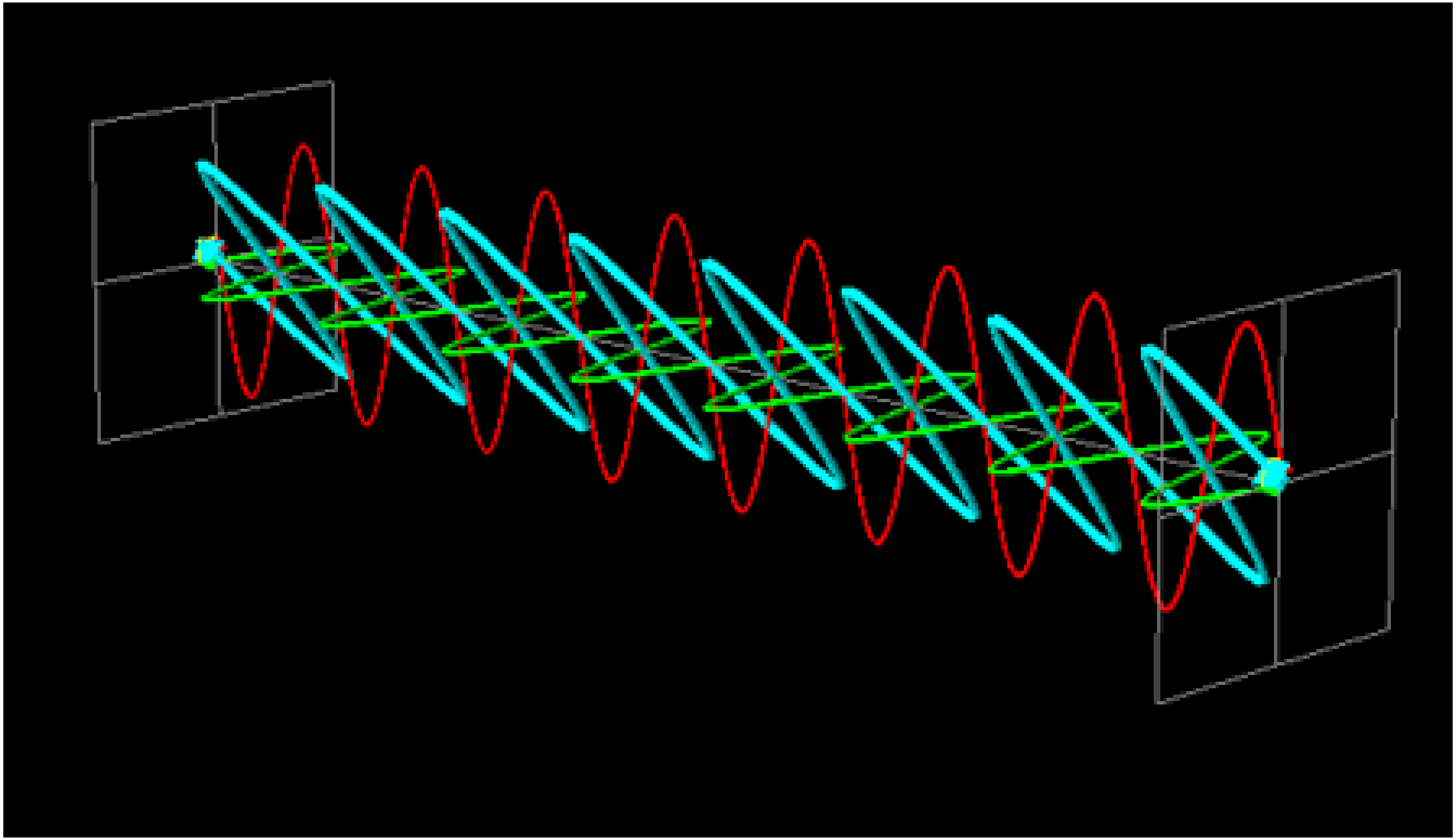
Polarisation rectiligne



Polarisation rectiligne



Polarisation rectiligne



Polarisation

Si $\varphi_y = \varphi_x + \pi/2\ [2\pi]$

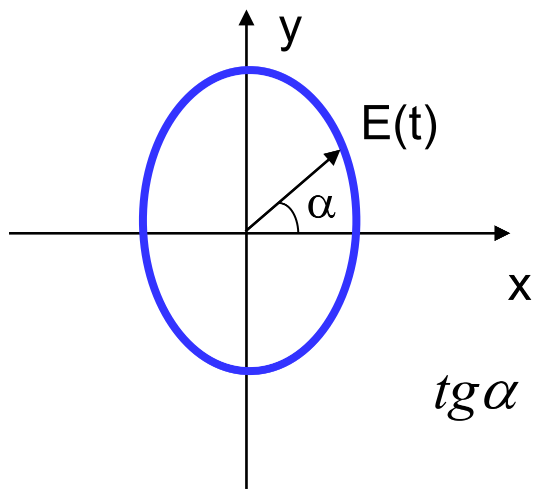
et comme $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin(\alpha)$

on a : $\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_y = -E_{0y}\sin(\omega t - kz + \varphi) \\ E_z = 0 \end{array} \right.$

On a noté $\varphi_x = \varphi$

Le vecteur **E** en un point z quelconque décrit une ellipse

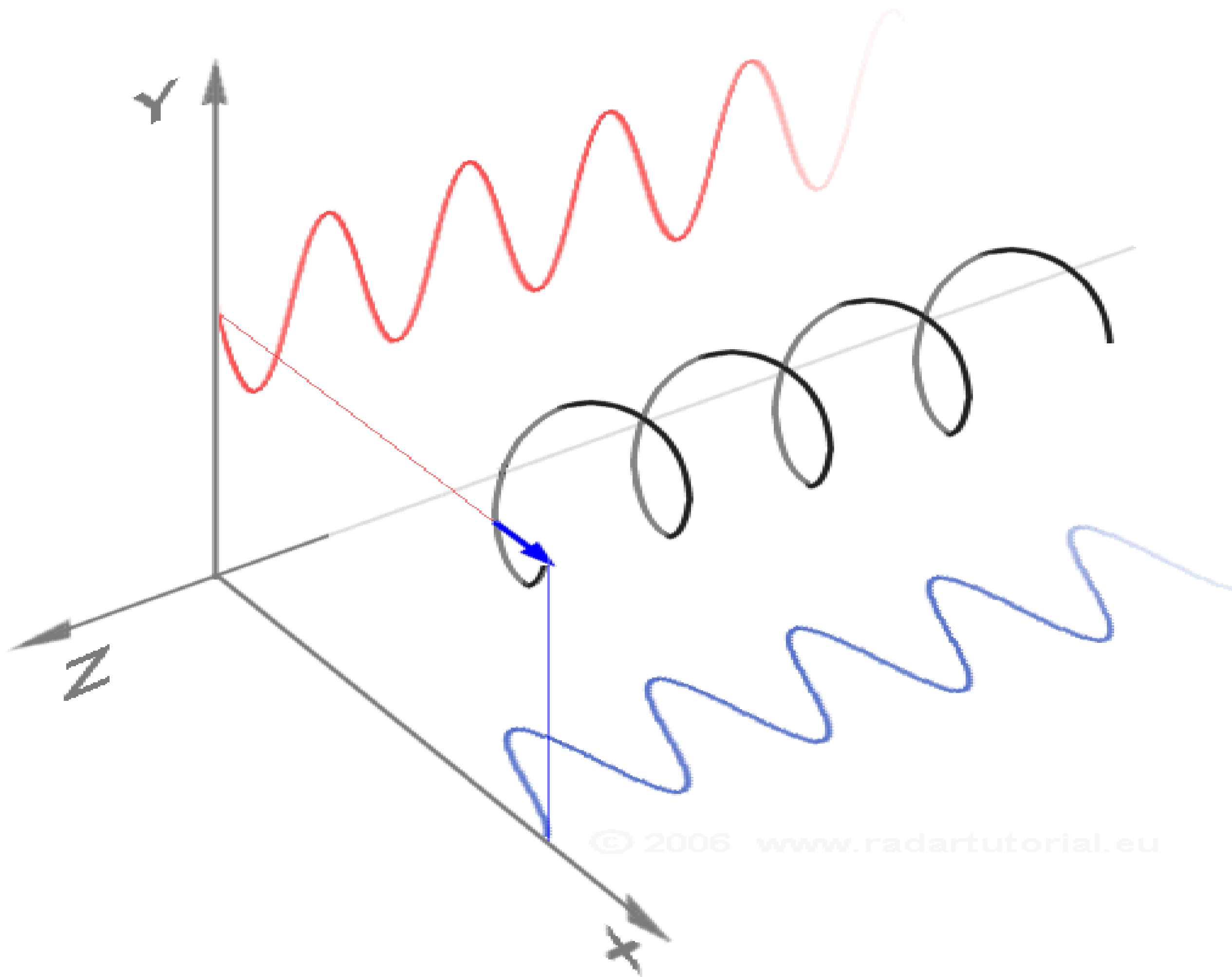
Puisque : $$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$$



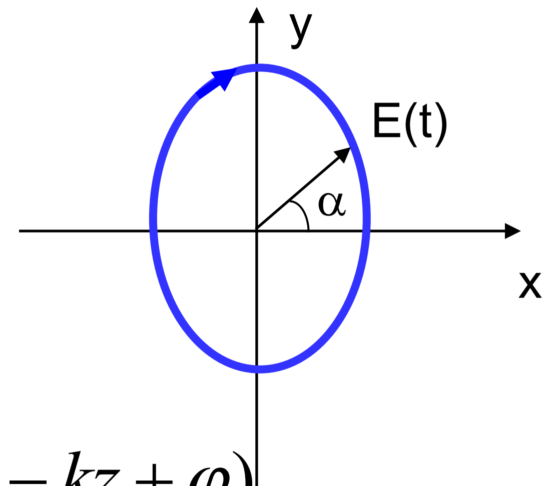
$$tg\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-E_{0y}}{E_{0x}} tg(\omega t - kz + \varphi)$$

POLARISATION ELLIPTIQUE

Polarisation circulaire



Polarisation



Le vecteur **E** en un point z quelconque décrit une ellipse

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}+\frac{E_y^2}{E_{0y}^2}=1$$

$$tg\alpha=\frac{E_y}{E_x}=\frac{-E_{0y}}{E_{0x}}tg(\omega t-kz+\varphi)$$

On dérive par rapport au temps $(1+tg^2\alpha).\dot{\alpha}=\frac{-E_{0y}}{E_{0x}}\omega.\left[1+tg^2(\omega t-kz+\varphi)\right]$

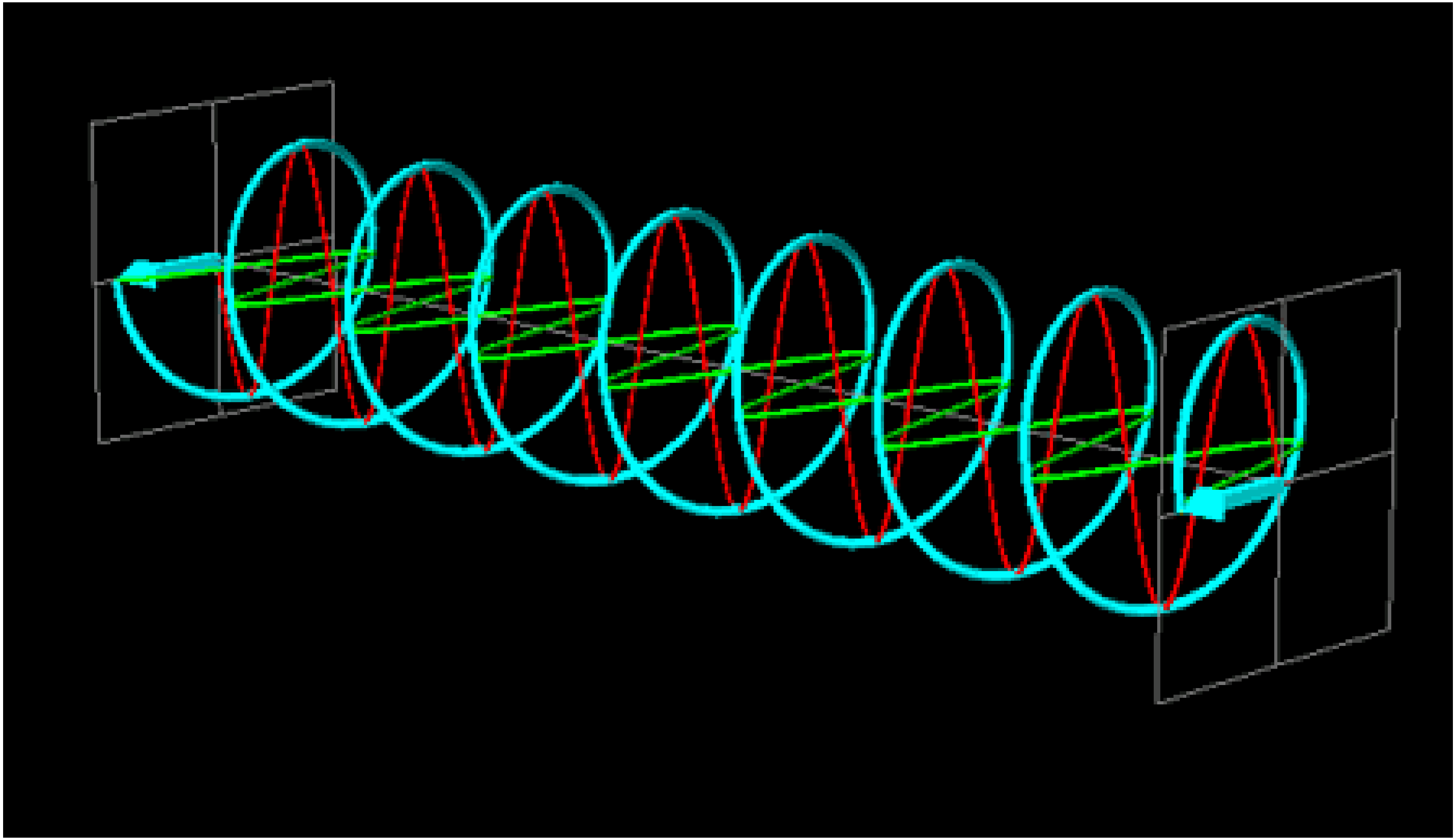
E_{0x}, E_{0y} sont positives toutes les deux (amplitudes réelles)

ω est également positive, donc $\dot{\alpha}<0$ ⇨ Rotation dans le sens rétrograde

On parle de polarisation droite

Si $E_{0x}=E_{0y}$ la polarisation est circulaire.

Polarisation circulaire droite



Polarisation

Si $\varphi_y = \varphi_x - \pi/2\ [2\pi]$

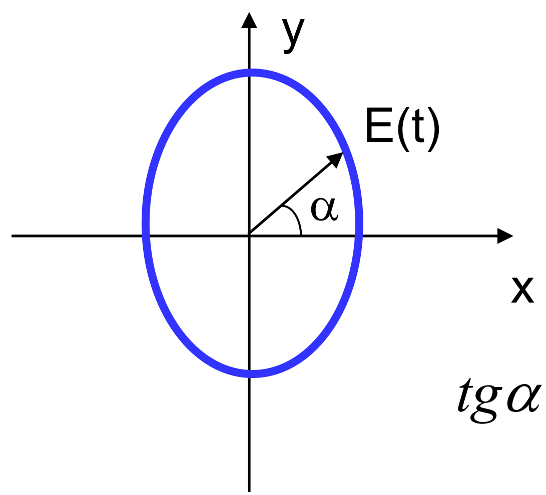
et comme $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin(\alpha)$

on a : $\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_y = E_{0y}\sin(\omega t - kz + \varphi) \\ E_z = 0 \end{array} \right.$

On a noté $\varphi_x = \varphi$

Le vecteur **E** en un point z quelconque décrit une ellipse

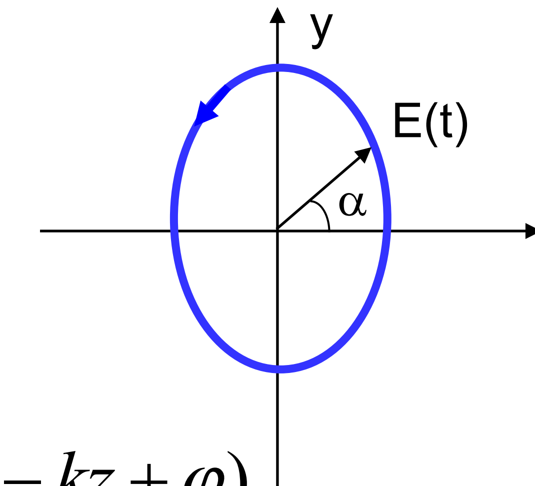
Puisque : $$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$$



$$tg\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} tg(\omega t - kz + \varphi)$$

POLARISATION ELLIPTIQUE

Polarisation



Le vecteur **E** en un point z quelconque décrit une ellipse

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$$

$$tg\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} tg(\omega t - kz + \varphi)$$

On dérive par rapport au temps $(1 + tg^2\alpha).\dot{\alpha} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \omega.\left[1 + tg^2(\omega t - kz + \varphi)\right]$

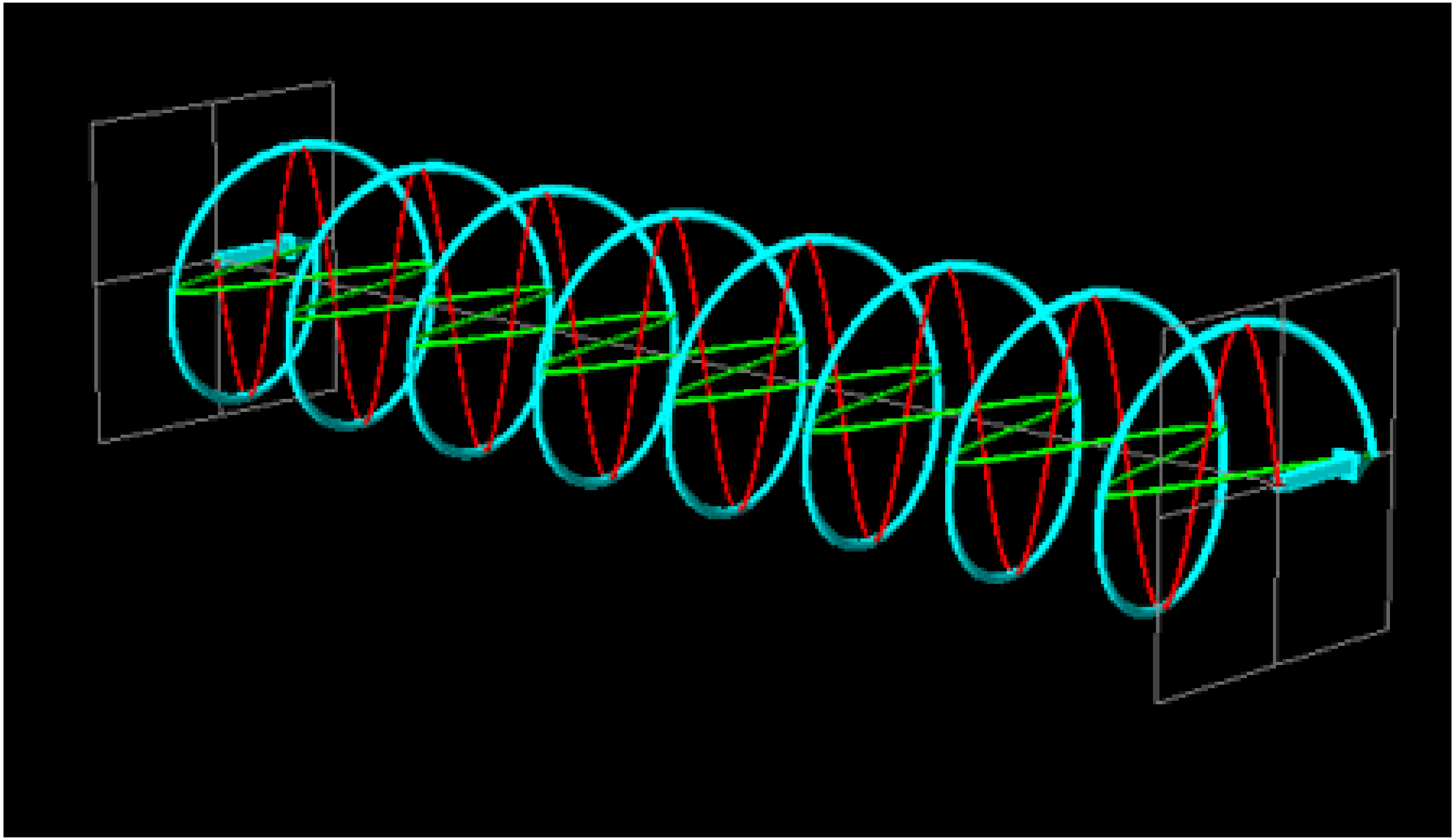
E_{0x}, E_{0y} sont positives toutes les deux (amplitudes réelles)

ω est également positive, donc $\dot{\alpha} > 0$ ➡ Rotation dans le sens direct

On parle de polarisation gauche

Si $E_{0x} = E_{0y}$ la polarisation est circulaire.

Polarisation circulaire gauche



Polarisation: cas général

Le vecteur **E** en un point z quelconque décrit une ellipse inclinée

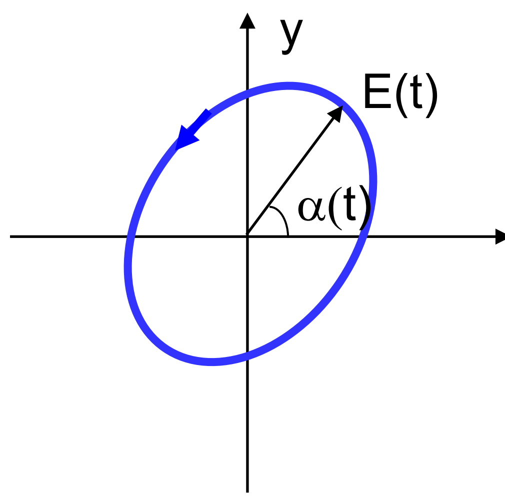
$$\vec{E}(M,t) = \left| \begin{array}{c} E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{E}(M,t) = \begin{cases} E_x = E_{0x}\ \cos(\omega t - kz + \Phi) \\ E_y = E_{0y}\ \cos(\omega t - kz) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Avec $\Phi = \varphi_x - \varphi_y$

On obtient :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\Phi = (\sin\Phi)^2$$



Si $\Phi = n\pi$, on retrouve la polarisation linéaire

Si $\Phi = \pi/2 + n\pi$, axes principaux de l'ellipse selon x et y

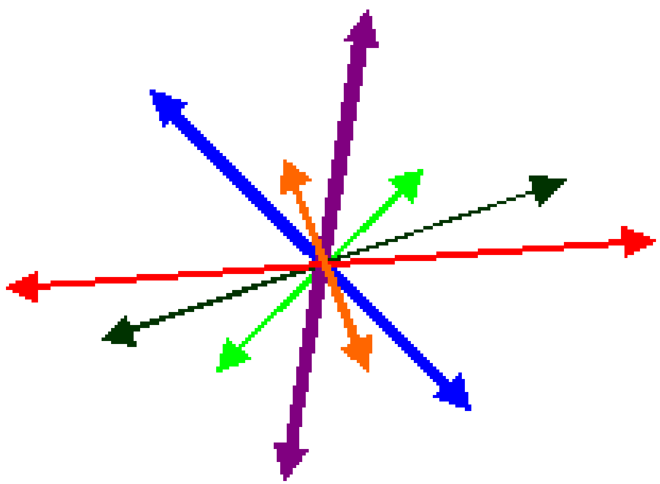
si en plus $E_{0x} = E_{0y}$ polarisation circulaire

Polarisation

Une onde polarisée elliptiquement (ou circulairement) est :
-Droite si ***E*** tourne autour de ***u*** dans le sens rétrograde
-Gauche si ***E*** tourne autour de ***u*** dans le sens direct

C'est la même chose pour ***B*** puisque $\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{E}$ et que $||\boldsymbol{B}|| = ||\boldsymbol{E}|| \,/\, \mathbf{c}$

En général, les sources classiques délivrent un rayonnement non polarisé, on parle de

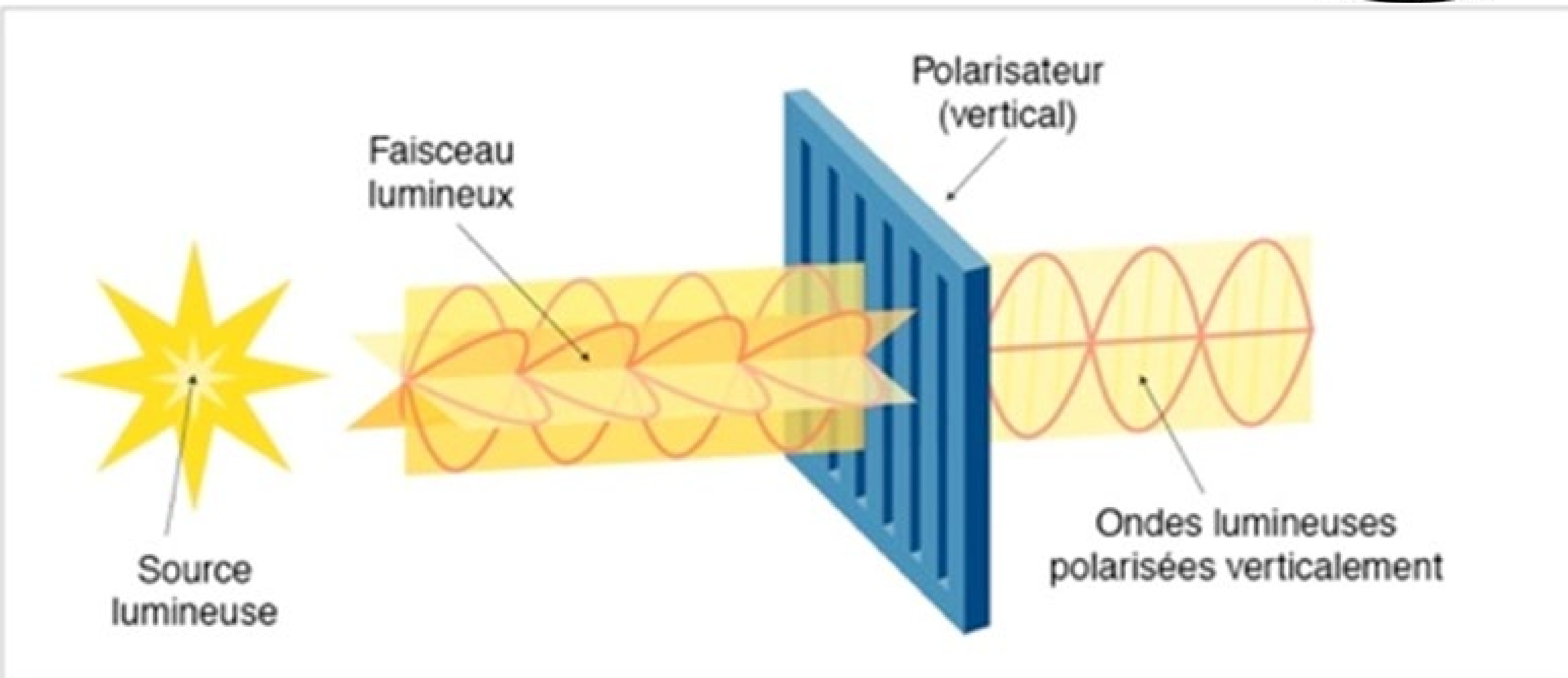


Onde naturelle non polarisée

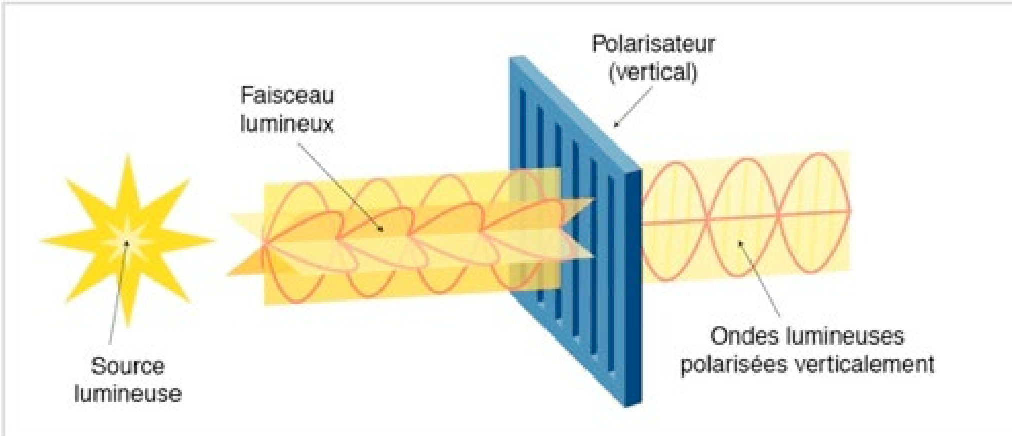
LUMIERE NATURELLE.

Polarisation

Mais on peut la polariser avec un polariseur qui a pour action de FILTRER une direction de polarisation.



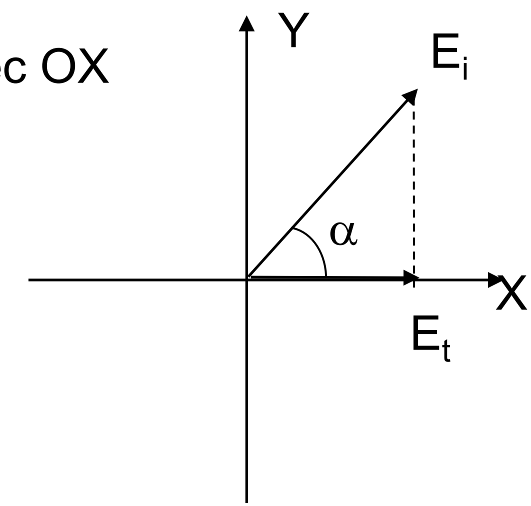
Polarisation



Ce polariseur possède 2 axes OX,OY et ne laisse passer que la composante de ***E*** // à un de ces axes.

Disons OX

Soit E_i le champ électrique incident qui fait un angle α avec OX



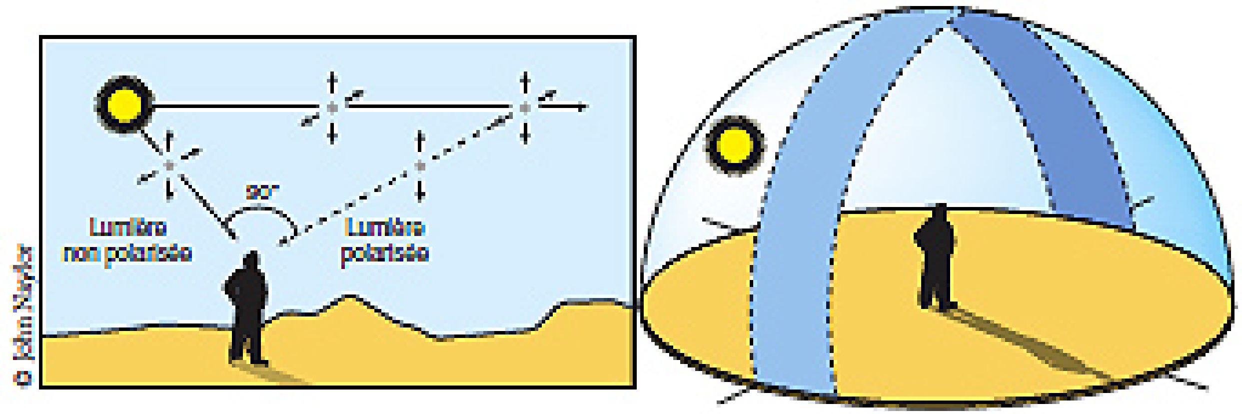
Au passage du polariseur seule la projection sur OX sera transmise

Donc : $\boxed{E_t = E_i \cos\alpha}$ **LOI de MALUS**

Diffusion Raighley par l'atmosphère: le bleu du ciel observé est polarisé

Les molécules de l'atmosphère sont assimilées à des dipôles oscillants à la même pulsation ω que l'OEM incidente.
La puissance diffusée P:

$$P \propto \omega^4$$



La lumière est polarisée verticalement si α=90°

Réflexion par une surface:

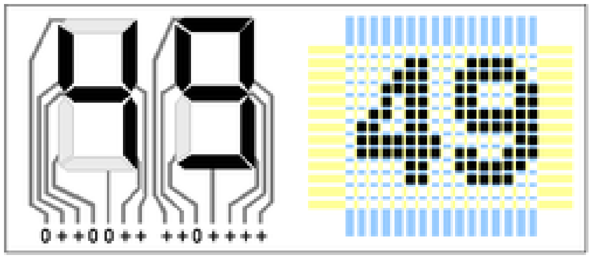
L'onde réfléchie est polarisée perpendiculairement à la surface.

On supprime la réflexion en utilisant un filtre polarisant qui ne laisse passer que Les OEM polarisées horizontalement

Photo avec polariseur

Photo sans polariseur

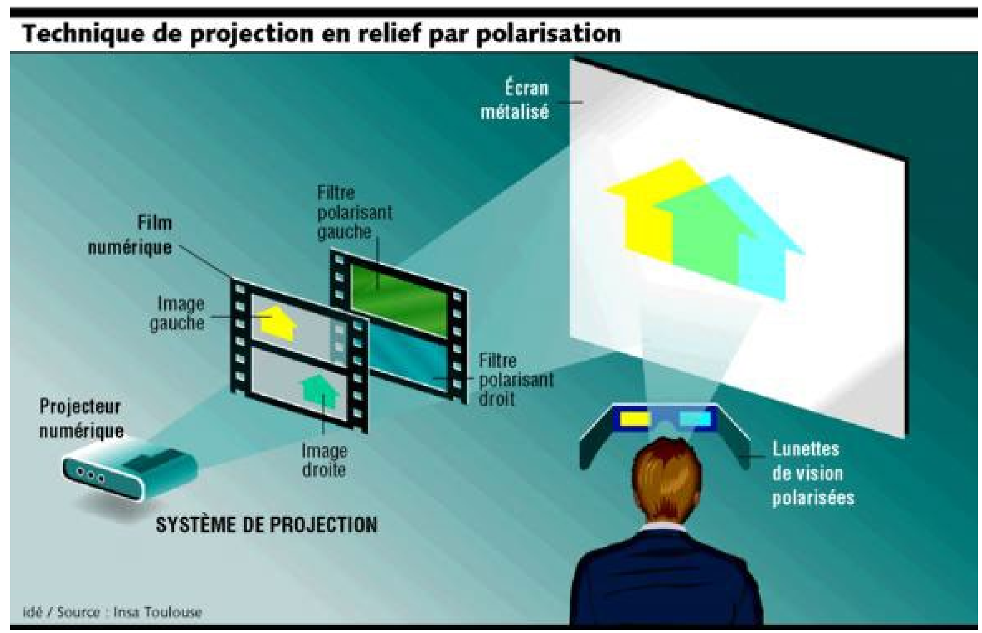
Exemples d'application



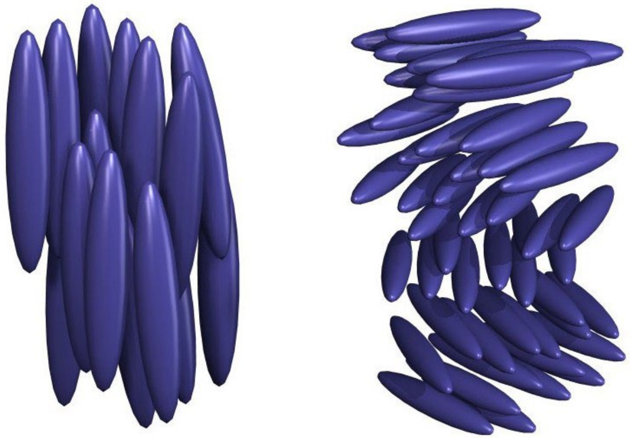
Ecran LCD

On utilise la polarisation de la lumière grâce à des filtres polarisants et à la biréfringence de certains cristaux liquides en phase nématique dont on peut faire varier l'orientation en fonction du champ électrique

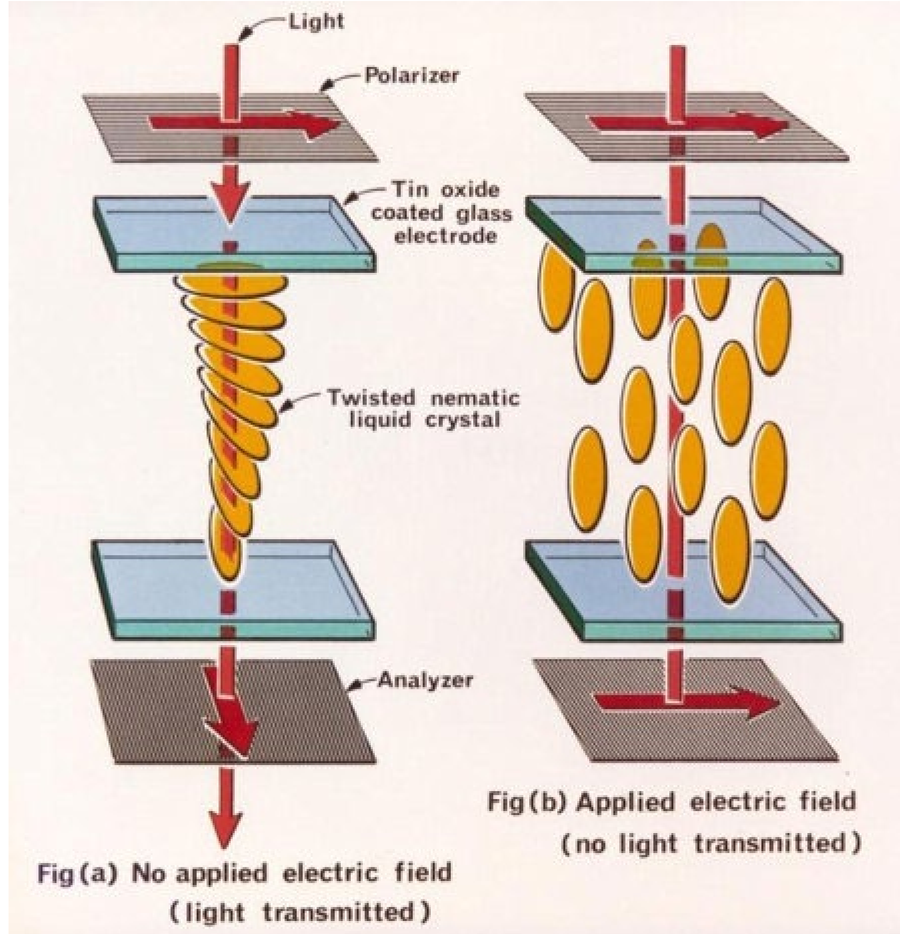
Cinéma 3D

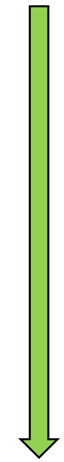


photo, cryptographie, etc.…



Molécules de cristal
liquide alignées
(phase dite « nématique »)





$\vec{E}$

Question : à partir de l'observation de l'antenne TNT (dite antenne « rateau ») sur le toit de votre habitation, indiquez la direction de la source, sa polarisation ainsi que l'ordre de grandeur de la longueur d'onde détectée.

Energie électromagnétique

En régime statique on définit les densités d'énergie $\boldsymbol{u_E}$ et $\boldsymbol{u_M}$

Électrostatique: condensateur plan: $$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnétostatique : solénoïde parfait $$u_M = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Ici on peut penser qu'il y a une énergie liée à l'onde

… qui se propage avec l'onde !

On va chercher :
- La densité d'énergie EM *stockée dans un volume*
- Le flux de puissance EM *à travers une surface*

Energie électromagnétique

On pose :

1. ***u*** la densité d'énergie EM *stockée dans un volume V*

   Soit : $$W = \iiint_V u dV$$

2. **P** la puissance EM qui traverse *une surface S*

   Cette puissance est le flux d'un vecteur P

   Soit : $$\mathrm{P} = \iint_S \vec{P}.\overrightarrow{dS}$$

Il reste à déterminer u et P, qui caractérisent une OEM

Energie électromagnétique

La première chose à considérer est la conservation de l'énergie.

1. La variation ***dW*** de l'énergie stockée *dans un volume V* pendant dt

vaut : $$dW = \left[\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt$$

2. l'énergie ***dW'*** pénétrant V à travers la *surface S* délimitant V

vaut : $$dW' = \mathrm{P}.dt = -\left[\oiint_S \vec{P}.\overrightarrow{dS} \right] dt$$

La conservation de l'énergie impose $dW' = dW + dW''$

Conversion de l'énergie EM
en une autre forme

Energie électromagnétique

dW'' est dû au travail de la force de Lorentz

Considérons une densité de charge ρ dans le volume V

Dans le volume dV la charge ***ρ dv*** reçoit la puissance :

$$dP_L = \vec{F}.\vec{v} = \rho.dV(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = \rho.dV.\vec{E}.\vec{v}$$

or $\rho.\vec{v} = \vec{j}$ et $dW'' = \left[\iiint_V dP_L.dV\right]dt$

$$dW'' = \left(\iiint_V \vec{j}\vec{E}.dV\right)dt$$

Energie électromagnétique

Finalement on a : $$-\left[\oiint_S \vec{P}.\overrightarrow{dS}\right]dt = \left[\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV\right]dt + \left[\iiint_V \vec{j}\vec{E}.dV\right]dt$$

Soit : $$-\oiint_S \vec{P}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \iiint_V \vec{j}\vec{E}.dV$$

Théorème d'Ostrogradski

$$\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{P}.dV$$

Donc : $$\vec{\nabla}.\vec{P} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j}\vec{E} = 0$$

Energie électromagnétique

Expression de u et P en fonction des champs E et B

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \vec{j} = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Donc : $$\vec{\nabla}.\vec{P} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.\vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\vec{E} = 0$$

D'autre part : $$\vec{\nabla}.(\vec{E} \wedge \vec{B}) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}).\vec{B} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}).\vec{E}$$

Donc : $$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}).\vec{E} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}).\vec{B} - \vec{\nabla}.(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\nabla}.\vec{P} + \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{E}}{\mu_0}}_{-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}.\vec{B} - \vec{\nabla}\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\vec{E}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}} = 0$$

Energie électromagnétique

$$\vec{\nabla}.\vec{P}+\frac{\partial u}{\partial t}+\underbrace{\frac{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}}{\mu_0}}_{-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}.\vec{B}-\vec{\nabla}\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}-\varepsilon_0\underbrace{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\vec{E}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}}=0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{P}+\frac{\partial u}{\partial t}+-\frac{1}{\mu_0}\underbrace{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\vec{B}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}}-\vec{\nabla}\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}-\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}=0$$

Energie électromagnétique

$$\vec{\nabla}.\vec{P} + \frac{\partial u}{\partial t} + -\frac{1}{\mu_0}\underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\vec{B}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}} - \vec{\nabla}\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} - \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{P} + \frac{\partial u}{\partial t} + -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} - \vec{\nabla}\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} - \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{P} - \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(u - \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right) = 0$$

Energie électromagnétique

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{P}-\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(u-\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right)=0$$

On définit alors (mais ce choix n'est pas forcément unique) :

$$\vec{P}=\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

Vecteur de Poynting

$$u=\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Densité d'énergie EM
cf statique

Energie transportée par une onde plane

- On considère une onde plane progressive se propageant selon Oz. L'onde est polarisée rectilignement (pour simplifier les calculs) . On cherche à effectuer un bilan d'énergie sur un cylindre d'axe Oz et de section S. Les caractéristiques de l'onde sont les suivantes :

$$\vec{E}(z,t) = E\cos(\omega t - \frac{\omega z}{c})\vec{u}_x \qquad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z$$

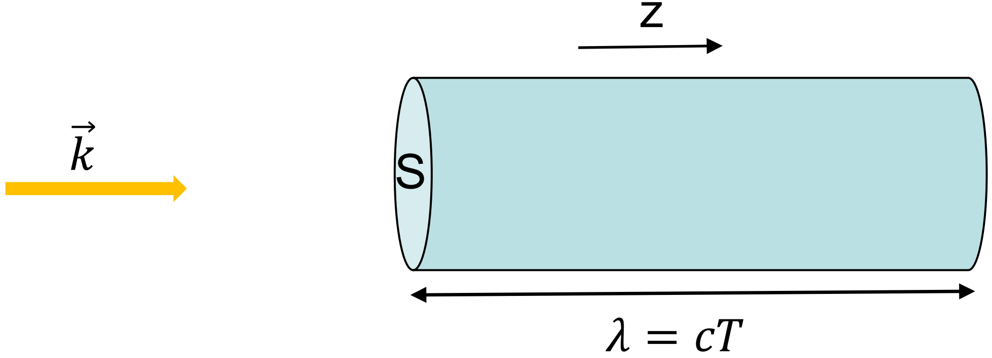
$$\vec{B}(z,t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(z,t)}{\omega} = -\frac{E}{c}\cos(\omega t - \frac{\omega z}{c})\vec{u}_y$$

- Le vecteur de Poynting de l'onde est donné par :

$$\vec{P}(z,t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - \frac{\omega z}{c})\vec{u}_z$$

- La densité d'énergie électromagnétique de l'onde est :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}(z,t)}{d\tau} &= \frac{\varepsilon_0 E^2(z,t)}{2} + \frac{B^2(z,t)}{2\mu_0} \\ &= \varepsilon_0 E^2 \cos^2(\omega t - \frac{\omega z}{c}) \end{aligned}$$



En régime stationnaire, la puissance instantanée entrante dans le cylindre est :

$$\mathcal{P}(z=0,t) = \iint \vec{P}(z,t)\cdot dS\vec{u}_z = \frac{SE^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - kz)$$

La puissance moyenne sur une période T est :

$$\langle\mathcal{P}(z=0)\rangle = \frac{E_0^2 S}{c\mu_0}\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \frac{\omega z}{c})\,dt}_{moyenne\ sur\ une\ periode=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2 S}{c\mu_0}$$

L'énergie entrante dans le cylindre pendant T :

$$\mathcal{E}_e(z=0) = \int_0^T \mathcal{P}(z,t)\,dt = \frac{E_0^2 S}{c\mu_0}\int_0^T \cos^2(\omega t - \frac{\omega z}{c})\,dt = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}T = \frac{\varepsilon_0 c S E^2}{2}T$$

Pendant la période T, l'onde a parcouru la distance $\lambda = cT$. L'énergie $\mathcal{E}_s$ stockée dans le cylindre de longueur $\lambda = cT$:

La moyenne temporelle sur une période de la densité d'énergie est constante sur tout le volume du cylindre :

$$\frac{d\langle\mathcal{E}_s(z)\rangle}{d\tau} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0 E^2\cos^2(\omega t - \frac{\omega z}{c})dt = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

En intégrant sur le volume du cylindre, on obtient l'expression de l'énergie stockée $\mathcal{E}_s$:

$$\langle\mathcal{E}_s\rangle = \iint_S dxdy\int_0^\lambda \frac{d\langle\mathcal{E}_s(z)\rangle}{d\tau}dz = \frac{\varepsilon_0 c S E^2}{2}T$$

Finalement : $\langle\mathcal{E}_s\rangle = \mathcal{E}_e$

L'énergie est conservée

Intensité

Pour la lumière (et pour les radiations de fréquence supérieures) les variations temporelles sont trop rapides.

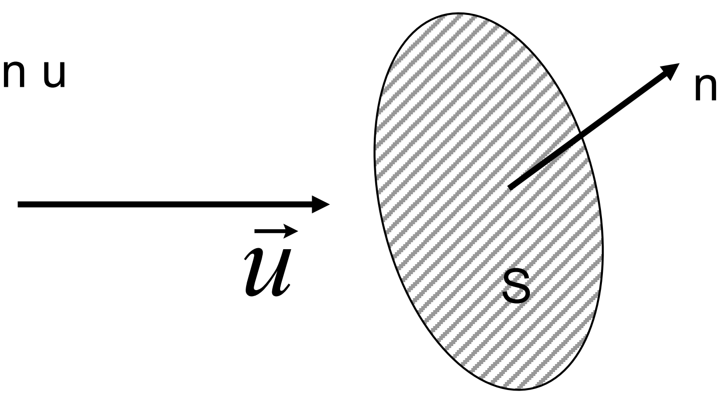
Aussi les détecteurs (œil, pellicule…) moyennent dans le temps → on définit l'intensité $\boldsymbol{I}$

$$I = \frac{< d\mathcal{P} >}{dS}$$

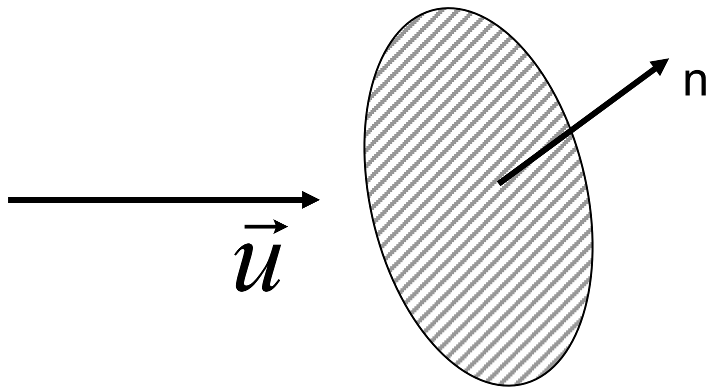
Puissance moyenne par unité de surface
⟨ ⟩ désigne une moyenne temporelle.

Soit une onde se propageant selon la direction u

traversant une surface S



Intensité



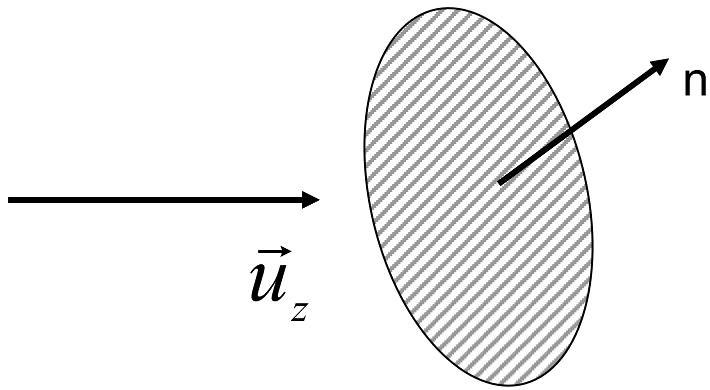
or $$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

$$d\mathcal{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} . \vec{n} dS = \frac{E^2}{\mu_0 c} dS \vec{u} . \vec{n}$$

$$= \frac{B^2 c}{\mu_0} dS \vec{u} . \vec{n}$$

$$I = \frac{< d\mathcal{P} >}{dS} = \frac{< E^2 >}{\mu_0 c} \cos(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{< B^2 > c}{\mu_0} \cos(\vec{u}, \vec{n})$$

Intensité



$\vec{u}_z$

Considérons une OEMPH se propageant selon Oz

$$\vec{E}^2 = E_{0x}^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_x) + E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_y)$$

$$< \vec{E}^2 > = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2}$$

$$I = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\mu_0 c} \cos(\vec{u}, \vec{n})$$

Quelque soit la polarisation, puisqu'on a fait aucune hypothèse sur φ_x et φ_y

Lien avec la mécanique quantique

Faisceau lumineux. Chaque photon a une énergie U= $h\,\nu = \hbar\,\omega$. Le faisceau comporte ρ photons par unité de volume. La puissance élémentaire du faisceau à travers la surface dS est :

$$d\mathcal{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} . \vec{n} dS = \frac{E^2}{\mu_0 c} dS \vec{u} . \vec{n}$$

Le flux élémentaire $d\Phi$ de photons passant à travers la surface élémentaire $\overrightarrow{ds} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ est donné par $d\phi = \rho c\,\overrightarrow{u}.\ dS\,\vec{n}$

$$dP = U\,d\Phi = \quad \rho\,c\,U\,\vec{u}\,.\,dS\vec{n}\ = \rho\,c\,h\nu dS\,\vec{u}.\vec{n}$$

On en déduit la densité ρ de photons du faisceau:

$$\rho = \frac{\varepsilon_0 E^2}{h\nu}$$