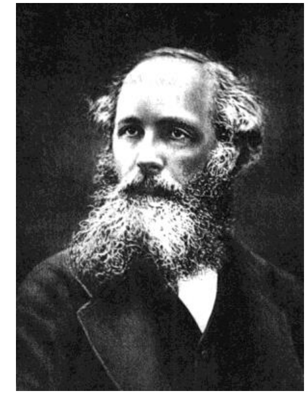
Structure de l’onde électromagnétique plane homogène

Il était une fois…



1873 : **James Clerk Maxwell** publie les **4 équations** dites **de Maxwell** qui posent les bases de l'électromagnétisme.

On va en déduire une équation de propagation pour les champs E et B

La vitesse de propagation de ces ondes = la vitesse de la lumière

…qui fut mesurée par **Hyppolite Fizeau** (1850)
- roue dentée
- c = 315 000 km/s

et **Léon Foucault** (1862)
- miroir tournant
- c = 298 000 km/s

1888 : **Heinrich Hertz** réalise la production d'OEM par un dispositif électrique.

Il montre l'équivalence entre ondes Hertzienne et la lumière.

OEM : l'équation d'onde

Equation d'onde pour E dans le vide $\Rightarrow$ $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases}$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On cherche l'équation satisfaite par E :

on va donc chercher à éliminer le champ B

Partons de : $$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

Or $$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On cherche l'équation satisfaite par E :

on va donc chercher à éliminer le champ B

Donc :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

D'autre part $$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla}.(\underbrace{\vec{\nabla}.\vec{E}}_{\substack{=0 \\ \text{dans le vide}}}) - \Delta \vec{E}$$

On cherche l'équation satisfaite par E :

on va donc chercher à éliminer le champ B

Finalement :

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

On peut établir l'équation satisfaite par B :

On part de : $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

Or $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Donc :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

D'autre part $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla}.(\underbrace{\vec{\nabla}.\vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B}$

Finalement : $\boxed{\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$

On se souvient (n'est-ce pas ?) que l'équation

$$\Delta\Phi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

est l'équation de d'Alembert

Dont certaines solutions sont de la forme

$$\Phi[x, y, z, t] = \Phi\left[0,0,0, t - \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right)\right]$$

ONDES PLANES

Ici l'équation est vectorielle, on a alors, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} (\Delta E)_x - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ (\Delta E)_y - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ (\Delta E)_z - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Avec $(\Delta E)_i = \Delta\vec{E}.\vec{u}_i = \dfrac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}$

O.E.M.P.H.

Ca se prononce :Onde ElectroMagnétique Plane Homogène

On considère une onde plane
se propageant suivant la direction (α,β,γ)

Vérifions qu'elle satisfait l'équation de propagation

On pose $u = t - \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = \dfrac{dE_x}{du}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = \dfrac{dE_x}{du} \\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = \dfrac{dE_x}{du}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = -\dfrac{\alpha}{c}\dfrac{dE_x}{du} \end{array}\right\} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\alpha}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

O.E.M.P.H.

On considère une onde plane

se propageant suivant la direction (α,β,γ)

On pose $u = t - (\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c})$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dE_x}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dE_x}{du}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{d^2 E_x}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right) = \frac{d}{du}\left(-\frac{\alpha}{c}\frac{dE_x}{du}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\alpha^2}{c^2}\frac{d^2 E_x}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{\alpha^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

On a donc $\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \dfrac{\alpha^2}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$

De même on obtient : $\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \dfrac{\beta^2}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \dfrac{\gamma^2}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$

Si bien que $\Delta E_x = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$ Or $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

$$\Delta E_x = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

On retrouve bien $\boxed{\Delta E_x = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \text{En identifiant} \quad c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$

Structure de l'OEMPH

On considère donc une onde PLANE se propageant suivant une direction ***u*** quelconque

soit $$E\left[x,y,z,t\right]=E\left[0,0,0,t-\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{c}\right)\right] \qquad \vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

Calculons la divergence de E $$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$=-\left[\frac{\alpha}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{\beta}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}+\frac{\gamma}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}\right]$$

$$=-\frac{\vec{u}}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Structure de l'OEMPH

On considère donc une onde PLANE se propageant suivant une direction ***u*** quelconque

soit $$E[x,y,z,t] = E\left[0,0,0,t-\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{c}\right)\right]$$

On a donc $$\vec{\nabla}.\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Or dans le vide $$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Structure de l'OEMPH

On décompose E en deux composante $E_{\perp}$ et $E_{//}$ respectivement $\perp$ et // à la direction ***u.***

Par définition $\vec{u}.\vec{E}_{\perp} = 0$ donc $\vec{u}.\dfrac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial t} = 0$

$$\vec{u}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}.\frac{\partial \vec{E}_{//}}{\partial t} = \vec{u}.\frac{\partial \vec{u}.E_{//}}{\partial t} = \frac{\partial E_{//}}{\partial t} = 0$$

Donc la seule composante de $E_{//}$ est STATIQUE

Qui ne nous intéresse pas dans le cadre des ONDES

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{E}}$$

Structure de l’OEMPH

Comme $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$

On déduit de la même façon $\boxed{\vec{u} \perp \vec{B}}$

Donc les **champs électrique** et **magnétique** d’une **OEMPH** se propageant dans le **vide** sont TRANSERVAUX

C’est-à-dire $\perp$ à la direction de propagation

Structure de l'OEMPH

Calculons maintenant le rotationel de E

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} \beta \dfrac{\partial E_z}{\partial t} - \gamma \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ \gamma \dfrac{\partial E_x}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \\ \alpha \dfrac{\partial E_y}{\partial t} - \beta \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \end{pmatrix} = -\frac{\vec{u}}{c} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Or $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc $\dfrac{\vec{u}}{c} \wedge \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Structure de l'OEMPH

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\vec{u}}{c} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En intégrant par rapport à t on obtient

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} + \cancel{\vec{B}_{statique}}$$

Donc **B** est $\perp$ **u** et $\perp$ **E**

De plus,
comme ***E*** est perpendiculaire à ***u*** on a $\dfrac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \dfrac{1}{c}$

Structure de l'OEMPH

On a donc $\vec{u} \perp \vec{E}$ $\vec{u} \perp \vec{B}$ et $\vec{E} \perp \vec{B}$

Donc les **champs électrique** et **magnétique** d'une **OEMPH** se propageant dans le **vide** sont TRANSERVAUX et MUTUELLEMENT **orthogonaux** et tels que le **rapport de leurs modules** soit égal à ***c.***