Equations de Maxwell dépendantes du temps

Les sources $\rho(t)$ et $\vec{j}(t)$

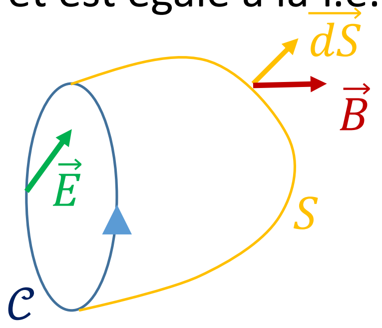
des champs $\vec{E}(t)$ et $\vec{B}(t)$ dépendent du temps

Retour sur la circulation de $\vec{E}$

On considère un circuit fermé fictif $\mathcal{C}$ sur lequel s'appuie une surface $\mathcal{S}$. On sait que la circulation du champ $\vec{E}(t)$ sur le circuit $\mathcal{C}$ n'est plus nulle et est égale à la f.e.m. e:

$$e = \oint \vec{E}(t).\vec{dl} = -\frac{d\Phi_S\,(t)}{dt} = -\frac{d\iint \vec{B}(t).\vec{dS}}{dt}$$

Or d'après Stokes $\oint \vec{E}(t).\vec{dl} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(t))\,.\,\vec{dS}$



On en déduit que pour toute surface $\mathcal{S}$ fictive , on a : $-\frac{d\iint \vec{B}(t).\vec{dS}}{dt} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(t)).\,\vec{dS}$

Ou encore : $\iint \left(\frac{d\vec{B}(t)}{dt} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(t)\right).\vec{dS} = 0$, quels que soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ choisis.

Ceci implique l'équation locale dépendante du temps (Equation de Maxwell-Faraday):

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(t) = -\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

En régime variable , la circulation du champ électrique n'est plus conservative ($\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(t) \neq \vec{0}$)

Les champs magnétique et électrique sont interdépendants.

Retour sur la circulation de B

En statique ρ et $\vec{j}$ ne dépendent pas de t

Donc $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ Et d'après l'équation de continuité $\vec{\nabla}.\vec{j} = 0$

Ce qui est cohérent avec $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0.\vec{j}$

Puisque $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0$

Par contre en régime variable $\vec{j} \neq \dfrac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ puisque $\vec{\nabla}.\vec{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

Considérons une grandeur $\vec{T}$ telle que $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \vec{T}$

Circulation de B

Posons $\vec{T} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{j}$ Soit $\vec{\nabla}.\vec{T} = \underbrace{\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}_{=0} - \mu_0 \underbrace{\vec{\nabla}.\vec{j}}_{= -\frac{\partial \rho}{\partial t}} = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$

D'après le théorème de Gauss $\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{E}$

Qu'on reporte dans $\vec{\nabla}.\vec{T} = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$

On a alors $\vec{\nabla}.\vec{T} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}.\vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Soit $\vec{\nabla}.(\vec{T} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$

Finalement, si on pose $\vec{T} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On a

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Equation de Maxwell-Ampère

Circulation de B

On vient d'étabir l'équation de Maxwell Ampère, valable dans tous les cas (statique ou variable)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En régime statique $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ On retrouve bien $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

En fait on a transformé j par $\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell a nommé ce terme
Courant de déplacement

Ainsi ce nouveau courant est à flux conservatif, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de la surface (mathématiquement : Div J=0)

Résumé (Champ E)

	Régime statique	Régime variable
Circulation de E — Forme intégrale	$\oint_{\Gamma^+} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$	$\oint_{\Gamma^+} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma} \vec{B}.\overrightarrow{dS}$
	Circulation conservative	Eq. de Maxwell-Faraday
Circulation de E — Forme locale	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Flux de E — Forme intégrale	$\oiint_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
	Théorème de Gauss	
Flux de E — Forme locale	$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Résumé (Champ B)

	Régime statique	Régime variable
Forme intégrale	$\oint_{\Gamma^+} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j}.\overrightarrow{dS}$	$\oint_{\Gamma^+} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_\Sigma (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}).\overrightarrow{dS}$
Circulation de B		Théorème d'Ampère généralisé
Forme locale	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Forme intégrale	$\iint_\Sigma \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$	$\iint_\Sigma \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$
Flux de B		
Forme locale	$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$	$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$

Potentiels

Rappel mathématique: $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$ $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}.V) = 0$

En <u>statique</u> on a $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$ ou $\overrightarrow{rot} \wedge \vec{E} = 0$ Circulation de E conservative

D'où $\vec{E} = \vec{\nabla}.V$ ou $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}.V$

$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ ou $\overrightarrow{div}.\vec{E} = 0$ Flux de B conservatif

D'où $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ou $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \wedge \vec{A}$

En <u>régime variable</u> on a $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ et $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Potentiels

On reporte $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ dans $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

D'où $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{\nabla} \wedge \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

On peut échanger l'ordre des dérivées car
✆ ne concerne que les variables spatiales
Et ✩✉✩t ne concerne que le temps

On peut alors écrire $\vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$

Soit $\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}.V$

Finalement les potentiels sont définis par :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}.V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Remarques: V et A ne sont pas uniques

Relation locale	Relation Intégrale	Potentiel	Equation de
$\vec{\nabla}\,.\vec{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$	$\oiint \vec{E}(M,t).\overrightarrow{dS} = \dfrac{\oiiint \rho(M,t)d\tau}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sum Q_{int}(t)}{\varepsilon_0}$		Maxwell-Gauss
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial\vec{B}(M,t)}{\partial t}$	$e = \oint \vec{E}(M,t).\overrightarrow{dl} = -\dfrac{d\iint \vec{B}(M,t).\overrightarrow{dS}}{dt}$	$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}\mathrm{V}(\mathrm{M,t}) - \dfrac{\partial\vec{A}(M,t)}{\partial t}$	Maxwell-Faraday (induction)
$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M) = \mu_0\vec{J}(M) + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t}$	$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint (\vec{J}(M,t) + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t}).\overrightarrow{dS}$		Maxwell-Ampère
$\vec{\nabla}\,.\vec{B}(M,t) = 0$	$\oiint \vec{B}(M,t).\overrightarrow{dS} = 0$	$\vec{B}(M,t)=\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M,t)$	Maxwell-Flux
$\vec{\nabla}\,.\vec{J}(M,t) + \dfrac{\partial\,\rho(M,t)}{\partial t} = 0$	$\oiint \vec{J}(M,t).\overrightarrow{dS} = -\dfrac{\partial Q(t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\oiiint \rho(M,t)d\tau$		Conservation de la charge