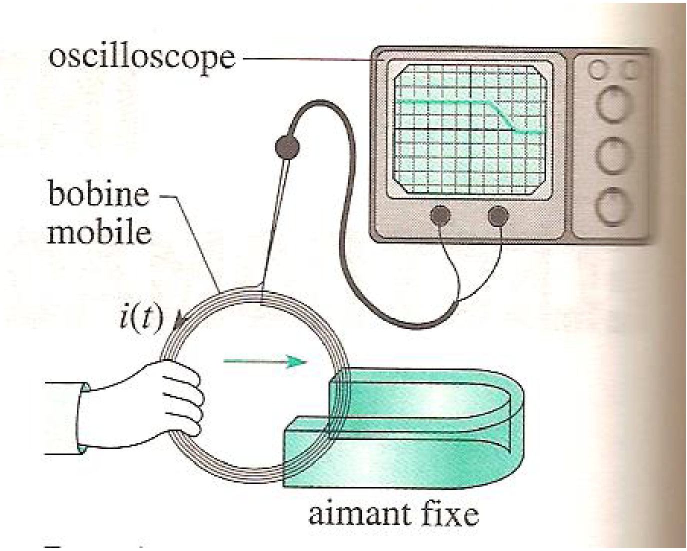
# L'induction Electromagnétique

## 1. Le phénomène d'induction :

- Bobine mobile dans un champ B fixe:
  - Bobine fixe : U=0
  - Le signe de U dépend du sens de V
  - L'amplitude de U dépend de la vitesse de la bobine.



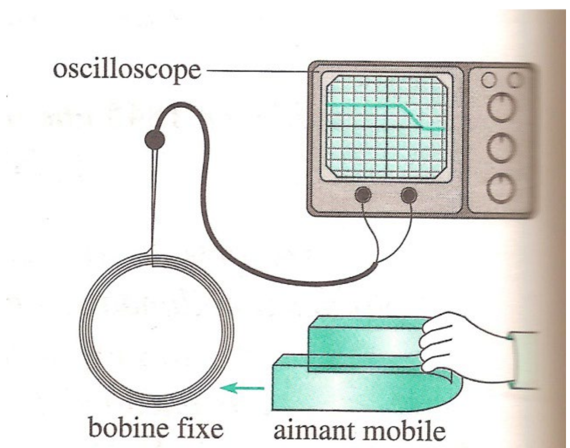

Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent peut se comporter comme un générateur électrocinétique. On observe un courant i. Il est le siège d'un phénomène d'induction. C'est l'induction de Lorentz.

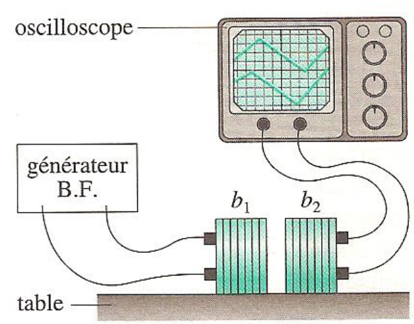
- Bobine fixe aux bornes d’un oscilloscope ou d’un galvanomètre dans un champ magnétique B variable:
  - Aimant fixe : tension u=0
  - Le signe de U dépend du sens de la vitesse de l’aimant
  - L’amplitude de U croit avec la vitesse de l’aimant.

Visualiser les films : https://youtu.be/Q8t_12NQpZY

https://www.youtube.com/watch?v=VxjrO_0l8OA

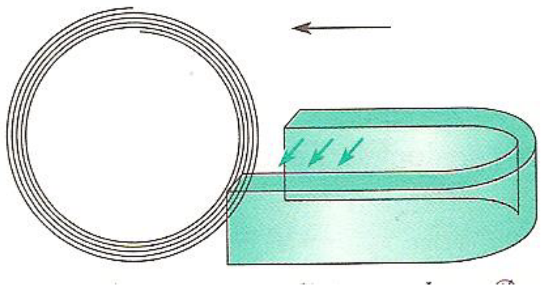
Un circuit fixe soumis à un champ magnétique variable est le siège d’un phénomène d’induction et se comporte comme un générateur électrocinétique. Il est le siège d’un phénomène d’induction. C’est l’induction de Neumann.



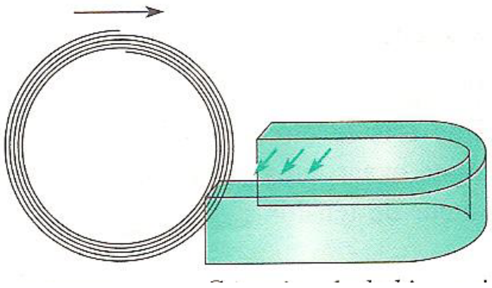




Champ B variable créé par une bobine b1 alimentée par un courant variable (générateur BF)

- L’induction électromagnétique est un phénomène unique: Les deux inductions de Lorentz et Neumann sont deux facettes qui dépendent du point de vue de l’observateur.

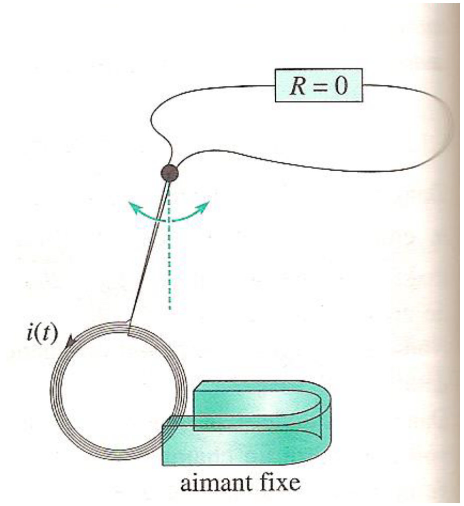


L’aimant se déplace avec une vitesse V

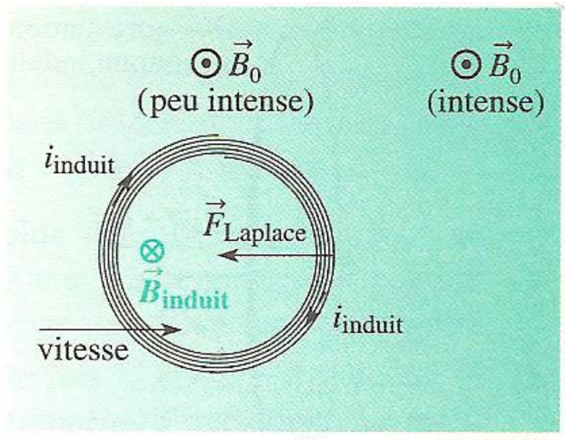


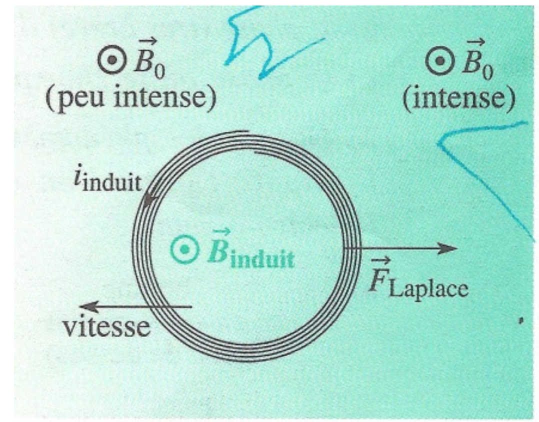
La bobine se déplace avec une vitesse V

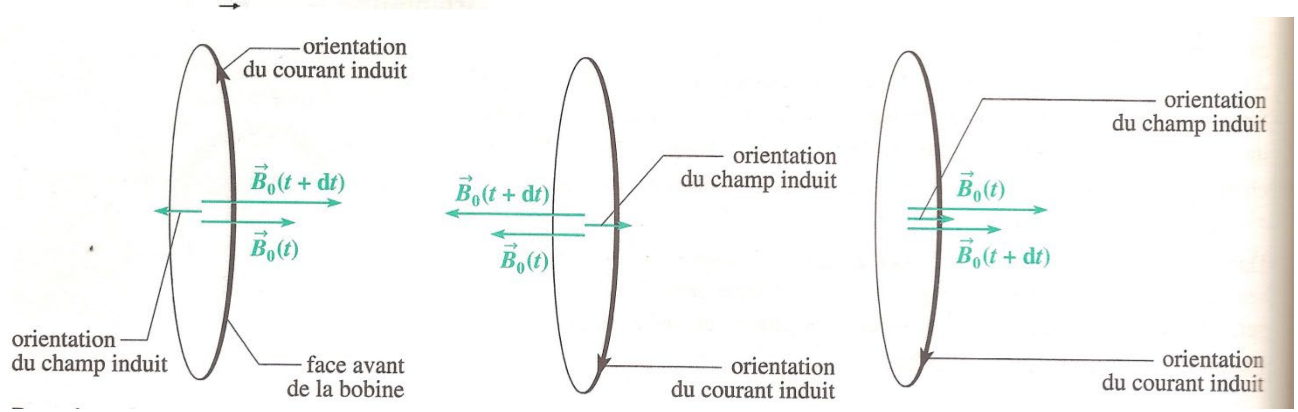
- <u>2-Loi qualitative de Lenz (ou principe de modération):</u>
- Expérience: oscillations d'une bobine dans un champ inhomogène. Les oscillations sont amorties.
- <u>Loi de Lenz</u> : Les effets magnétiques électrocinétiques et mécaniques de l'induction sont orientés de façon à s'opposer à ses causes (loi de modération)
  - Effet électrocinétique : courant $i$ induit dans la bobine
  - Effet magnétique : champ magnétique $\vec{B}_i$ associé au courant induit $i$
  - Effet mécanique : Force de Laplace totale



Déplacement d’une bobine dans un champ inhomogène :




Loi de Lenz : L’induction est à l’origine d’un courant induit $i$ :

- qui crée un champ induit $\vec{B}_i$ s’opposant à la variation de flux magnétique. Ce champ induit est bien plus petit que le champ appliqué.
- qui s’oppose au déplacement de la bobine via la force de Laplace appliquée au circuit. C’est le freinage par induction.

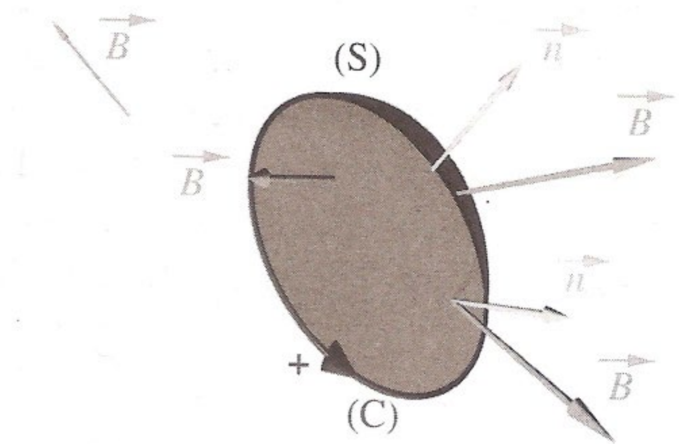
- La loi de Lenz est utile d'un point de vue pratique. Elle permet d'obtenir rapidement le sens du champ induit $\vec{B}_i$ qui doit s'opposer à la variation du flux du champ magnétique $\vec{B}_0$ dans le circuit. Le sens de $\vec{B}_i$ donne accès au sens du courant induit $i$ en utilisant la loi de Biot et Savart.
- La force de Laplace $d\vec{F}_L$ élémentaire qui s'applique sur un élément $\overrightarrow{dl}$ du circuit est donnée par $d\vec{F}_L = i\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_0$. La force de Laplace totale $\vec{F}_L = i \int \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_0$ qui s'exerce sur le circuit s'oppose au déplacement

du circuit afin de contrer la variation de flux du champ $\vec{B}_0$.

# 3. La loi de Faraday :

Michael Faraday (1831): les variations de flux de champ magnétique à travers un circuit fermé créent un courant électrique induit $i$. Ce courant induit est associé à une tension induite $e$ appelée force électromotrice (f.e.m.) induite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}.\vec{dS}$$




Où $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS}$ est le flux du champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur le circuit fermé.

La f.e.m. induite s'exprime en Volts. La loi de Faraday explique les deux phénomènes observés (Induction de Lorentz et de Neumann).

Le courant induit $i$ est donné par la loi d'Ohm $e = Ri$ où R est la résistance électrique du circuit.

- Utilisation pratique de la loi de Faraday:

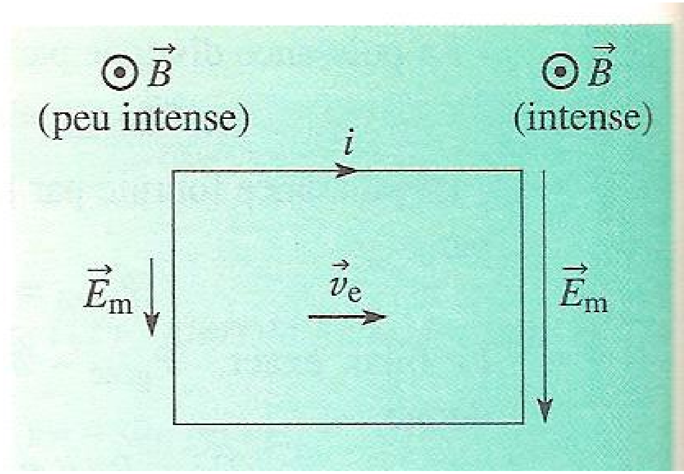
En pratique, pour obtenir la f.e.m. $e$ et le courant induit $i$ qui sont des quantités algébriques, il faut en premier lieu calculer le flux du champ magnétique $\vec{B}_0$ à travers n'importe quelle surface S qui s'appuie sur le circuit. Pour ce faire, on oriente le circuit (ce qui détermine le signe de la f.e.m. $e$ ainsi que celui du courant induit $i$).

Le choix d'orientation du circuit fixe le sens de $\overrightarrow{dS}$ et donc le signe du flux $\phi$. Les signes de $e$ et donc de $i = e/R$ sont indépendants de ces choix.

# 4. Origines de la f.e.m. induite

## a) Induction de Lorentz

Lors du déplacement d'un conducteur de vitesse $\vec{v}_e$ dans un champ magnétique indépendant du temps, les charges de conduction sont mises en mouvement par une force :




$$q\overrightarrow{E}_m = q\overrightarrow{v_e} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$\overrightarrow{E}_m = \overrightarrow{v_e} \wedge \overrightarrow{B}$$

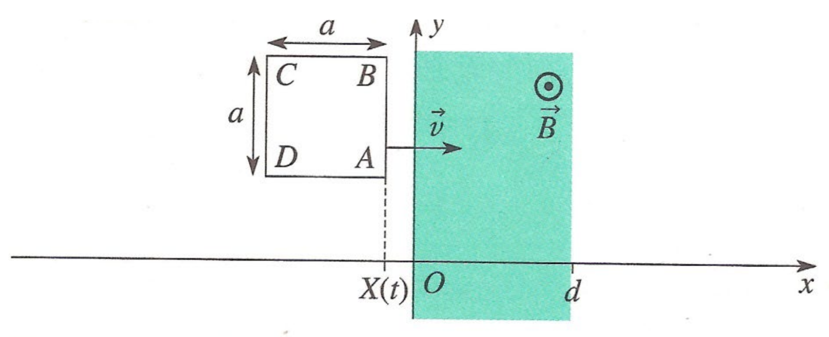
est appelé champ électromoteur de déplacement ou champ électromoteur de Lorentz

- La tension ou f.e.m de Lorentz induite par le déplacement du circuit électrique dans un champ magnétique permanent est égale à la circulation du champ électromoteur de déplacement le long du circuit (fictif ou réel).

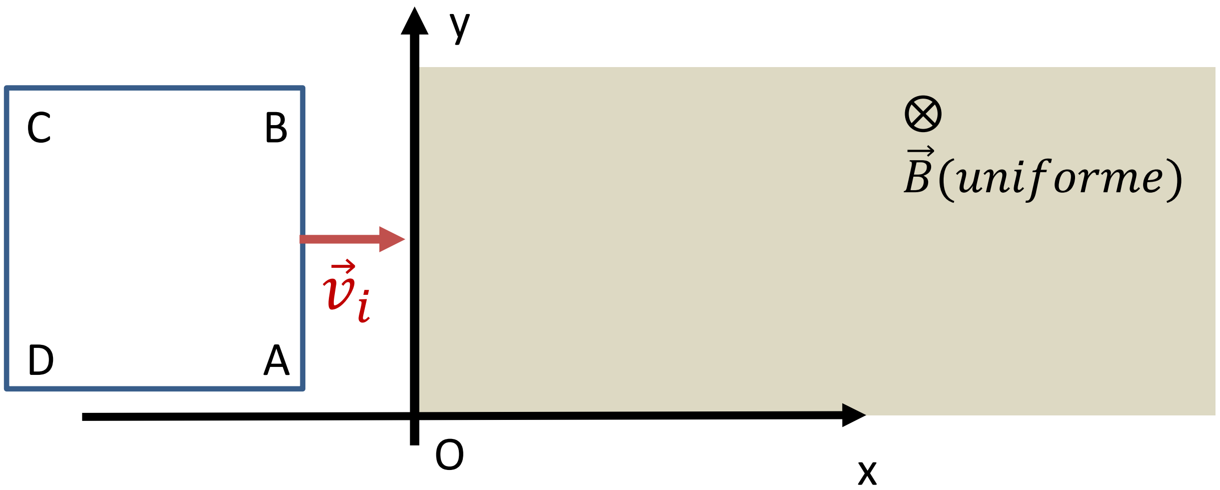
$$e_L = \int_A^B \overrightarrow{E}_m.\overrightarrow{dl} = \int_A^B (\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{dl}$$

- Si le circuit est fermé, l'apparition d'un courant induit dans une bobine  est lié au caractère non conservatif de la circulation du champ électromoteur $\vec{E}_m$(exemple : cadre fermé)

- Exemple : cadre rectangulaire dans un champ inhomogène.

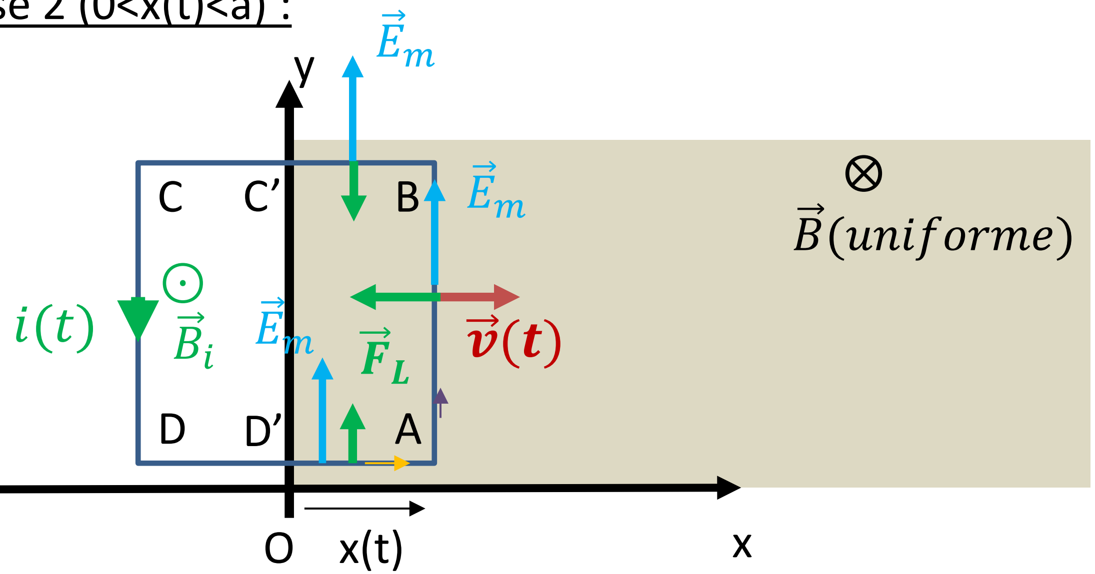


## Phase 1 (x(t)<0):




Pour x<0, $\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_m = \vec{0}$
Le courant induit est nul.
La force de Laplace est nulle
La vitesse $\vec{v}_i$ est constante
Pas de courant induit dans le circuit.

## Phase 2 (0<x(t)<a) :




Pour x<0, $\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_m = \vec{0}$
Pour x>0, $\vec{B} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_m = \vec{v}(t) \wedge \vec{B}$
$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$

$e = \oint_{ABCD} \vec{E}_m . d\vec{l} = a\, v(t) B$ et $i = \frac{e}{R} = \frac{a\, B}{R} v(t)$

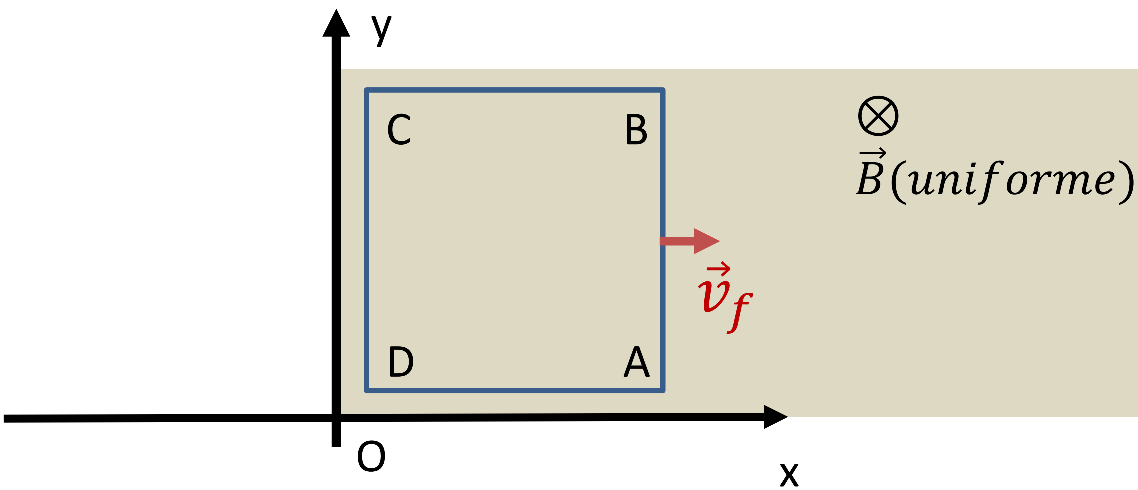
$$\vec{F}_L = i \oint_{C'}^{D'} d\vec{l} \wedge \vec{B} = i\,[\oint_{C'}^{A} d\vec{l} \wedge \vec{B} + \oint_{A}^{B} d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_{B}^{D'} d\vec{l} \wedge \vec{B}]$$

Or $\oint_{C'}^{A} d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_{B}^{D'} d\vec{l} \wedge \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{F}_L = i \oint_{A}^{B} d\vec{l} \wedge \vec{B} = -\frac{a\,B^2}{R}\, v(t)\,\vec{u}_x$

La force de Laplace freine le cadre et s’oppose à la variation du flux de $\vec{B}$.

On vérifie ainsi la loi de Lenz.

Phase 3 (a<x(t)) :



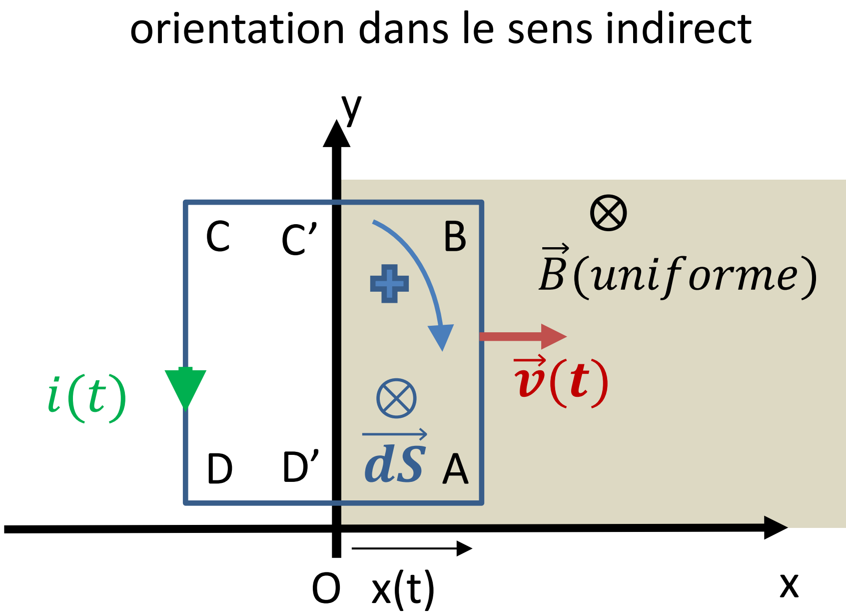

Pour x>a, $\vec{B} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_m = \vec{v}(t) \wedge \vec{B}$

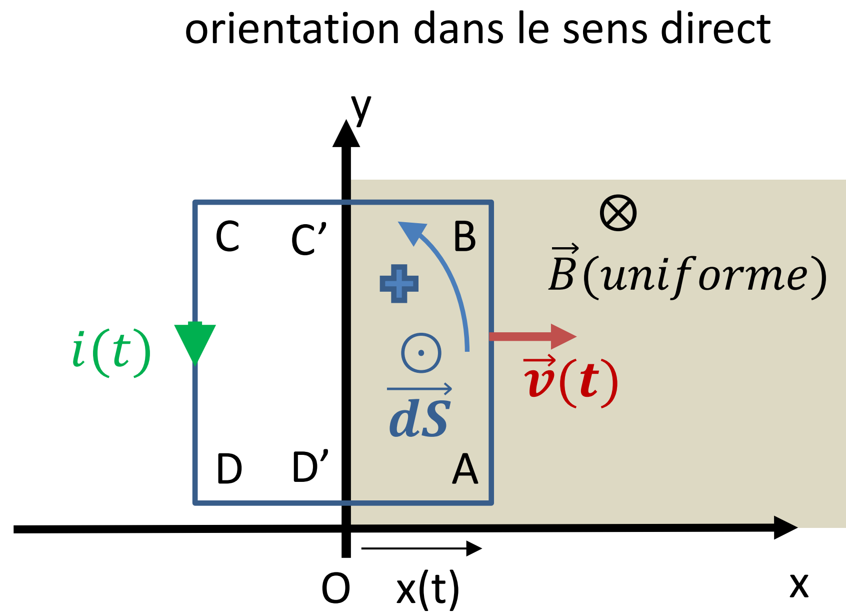
$$e = \oint_{ABCD} \vec{E}_m . d\vec{l} = 0$$

$$i = \frac{e}{R} = 0$$

$$\vec{F}_L = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_f = \overrightarrow{Cte}$$

- Résolution par la loi de Faraday: $e = -\dfrac{d\Phi(t)}{dt}$
  - Phase 1 : $\Phi = 0$ ; Phase 3 : $\Phi = \pm a^2 B$ . On a $e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = 0$ et $i = \frac{e}{R} = 0$
  - Phase 2 : $\Phi(t) = \iint_{D'ABC'} \vec{B}.\vec{dS} = \iint_{D'ABC'} -B\vec{u}_z \,.\, \pm\mathrm{dxdy}\,\vec{u}_z = \pm a\,B\,x(t)$




$\Phi(t) = +a\,B\,x(t)$

$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -aB\,v(t)$ <0

$i = \frac{e}{R} = \frac{-aB\,v(t)}{R} < 0$ (sens direct)

$\Phi(t) = -a\,B\,x(t)$

$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = +aB\,v(t)$ >0

$i = \frac{e}{R} = \frac{+aB\,v(t)}{R} > 0$ (sens direct)

Les valeurs et sens de e et i ne dépendent pas du choix d'orientation du circuit.

## b) Induction de Neumann : circuit fixe, $\overrightarrow{B}$ variable (hors programme)

$$e_N = \oint \overrightarrow{E}_m . \overrightarrow{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS}$$

$$\iint \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = \iint (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}).\overrightarrow{dS} = \oint \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dl}$$

En appliquant Stokes :

On obtient :

$$e_N = \oint \overrightarrow{E}_m . \overrightarrow{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\oint \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dl} = \oint -\frac{\partial \overrightarrow{A}(\vec{r},t)}{\partial t}.\overrightarrow{dl}$$

L’expression du champ électromoteur de Neumann s’écrit:

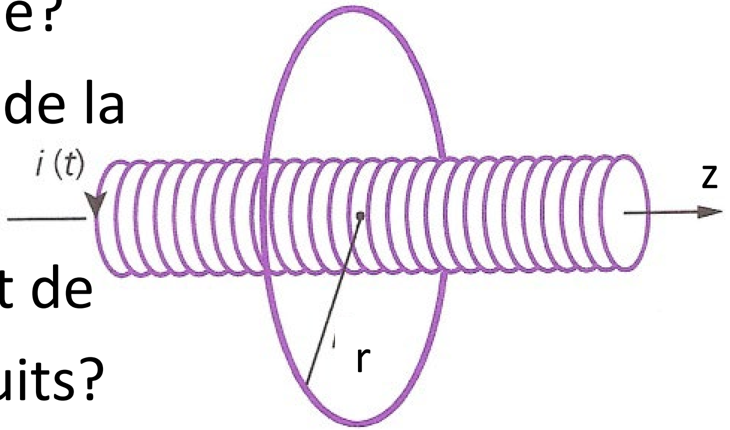
$$\overrightarrow{E}_m = -\frac{\partial \overrightarrow{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

- Exemple :

  – Solénoïde de rayon R + bobine circulaire de rayon r couplés:

  – Les deux circuits sont coaxiaux. On considère le solénoïde comme infini.

    - Quelle est la f.e.m. dans la bobine?
    - La f.e.m. dépend-t-elle du rayon de la Bobine? Et le courant i?
    - Quel est l’effet de l’orientation et de la position relatives des deux circuits?



- Le champ magnétique créé par le solénoïde est :
  - $\vec{B} = \mu_0 n\, i\, \vec{u}_z$ si r<R (à l'intérieur du solénoïde)
  - $\vec{B} = \vec{0}$ si r>R (à l'extérieur du solénoïde)

Pour calculer la f.e.m. $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, avec $\Phi = \iint \vec{B}\,.\,\overrightarrow{dS}$. L'intégrale porte sur la surface du disque de rayon r. $\overrightarrow{dS}$ est la normale à la surface de la bobine.

$$\Phi = \iint \vec{B}\,.\,\overrightarrow{dS} = \iint \mu_0 n\, i(t)\vec{u}_z.\, dS\, \vec{u}_z = \mu_0 n\, i(t) \iint dS = \mu_0 n\, i(t)\, S$$

où S est la surface de la bobine traversée par le champ magnétique $\vec{B}$

On obtient $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n\, S \frac{di(t)}{dt}$

On distingue deux cas :

- r<R , la bobine est à l'intérieur du solénoïde

La surface S de la bobine traversée par le champ magnétique est $S = \pi r^2$

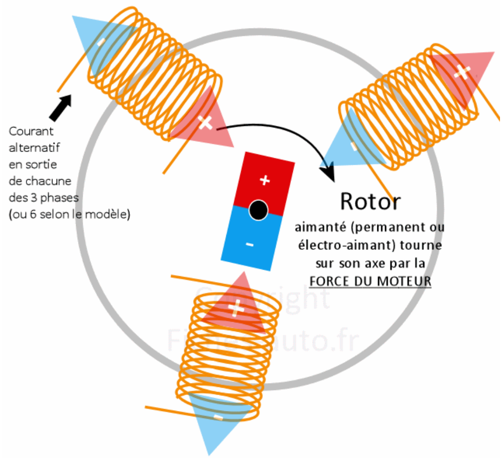
- r>R , la bobine entoure le solénoïde

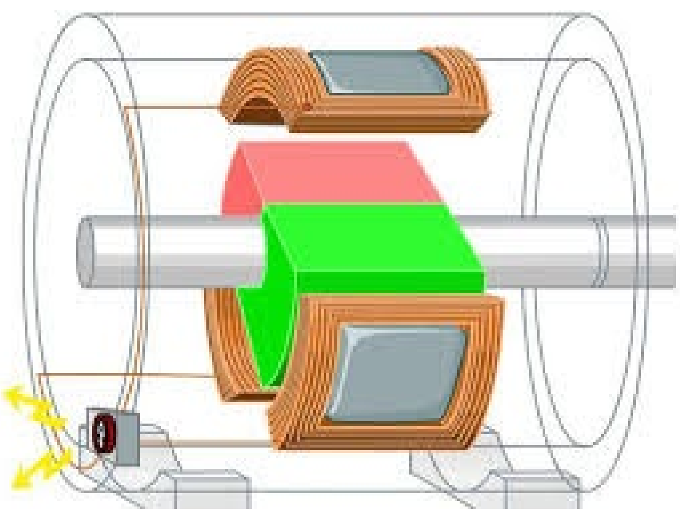
La surface S de la bobine traversée par le champ magnétique est $S = \pi R^2$

Que se passe t-il si les axes des deux circuits ne sont pas confondus?

Et si les axes ne sont pas parallèles?

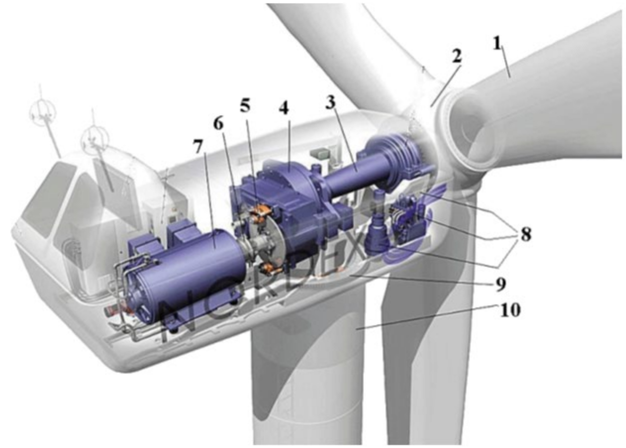
- Application de l’induction de Neumann : l’alternateur électrique

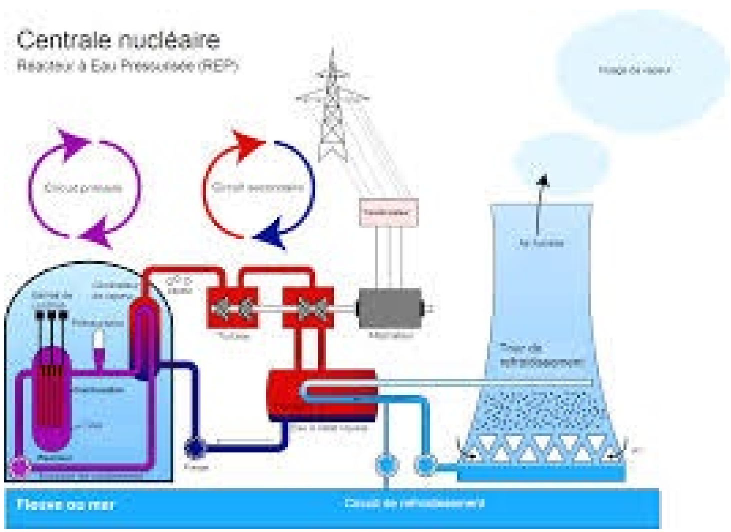


Courant alternatif triphasé

Générateur électrique


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


Centrale nucléaire
Réacteur à Eau Pressurisée (REP)

# 5. Généralisation :

Pour une maille de contour $\Gamma$, placée dans un champ **B** variable, et se déplaçant à la vitesse **$V_e$,** la f.e.m. d'induction s'écrit :

$$e = e_N + e_L = \oint_\Gamma \left(-\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}\right).\vec{dl}$$

- Si la maille est fixe, on a : $e = \oint -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}.\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}$

- Si **B** est permanent (indépendant du temps), alors : $e = \oint \vec{v}_e \wedge \vec{B}.\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}$

- On démontre (et on admettra) que dans le cas général (**B** variable et **$V_e$** non nulle), on a toujours :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}.\vec{dS}$$

- Pour obtenir le courant induit, on applique la loi d'Ohm généralisée e=Ri.

D'autre part :

$$\text{Stokes : } \oint \overrightarrow{E}_m.\overrightarrow{dl} = \iint (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}_m).\overrightarrow{dS}$$

Finalement :

$$-\frac{d}{dt}\iint \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = \iint (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}_m).\overrightarrow{dS}$$

Cette relation est valable quel que soit le circuit choisi. On a donc nécessairement en tout point de l'espace :

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}}$$

Equation de Maxwell Faraday

## 6. Courants de Foucault :

Un champ électromoteur $\vec{E}_m$ apparait dans le volume d'un conducteur si celui-ci est le siège d'un champ magnétique variable ou s'il se déplace avec une vitesse $\vec{v}_e$ dans un champ magnétique:

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}_m = -\frac{d\overrightarrow{B}}{dt} \qquad\qquad \overrightarrow{E}_m = \overrightarrow{v_e} \wedge \overrightarrow{B}$$

Ce champ électromoteur est à l'origine d'un courant volumique $\vec{J}$:

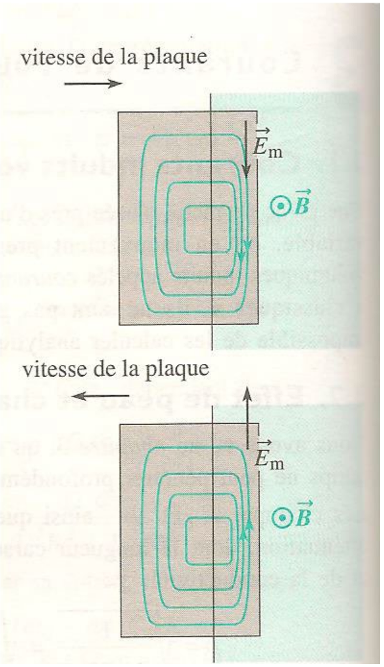
Loi d'Ohm locale : $\overrightarrow{J} = \gamma \overrightarrow{E}_m$

**Exemple de freinage par induction :**

Un pendule oscillant dans un champ magnétique voit ses oscillations amorties.
On remarque un freinage du pendule lorsque celui-ci pénètre dans la zone du champ ou en sort. Ce freinage est dû à l'apparition d'un champ électromoteur qui est à l'origine
de la circulation d'un courant dans le volume de la plaque (courant de Foucault). Les forces magnétiques (Laplace) s'exerçant sur la plaque s'opposent à la variation du flux du champ magnétique à travers la plaque lorsque celle-ci entre ou sort de la zone de champ. Le courant induit crée un champ B induit qui tend à s'opposer à la variation du flux de B. ces deux phénomènes illustrent à nouveau la loi de Lenz

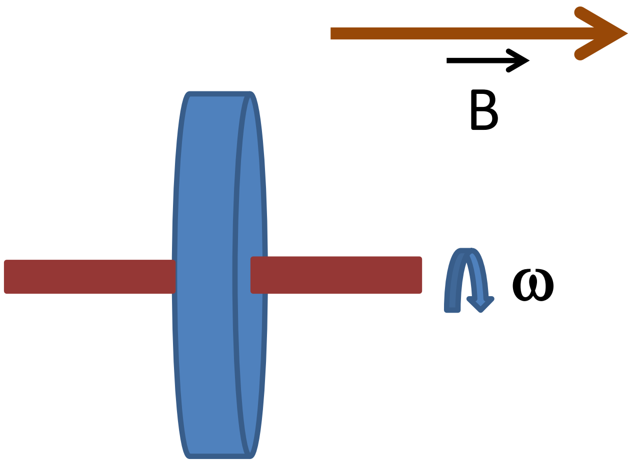
Film à visionner : https://youtu.be/9_rbI-5RnnU

Sur la figure de droite, les lignes de courant (en vert)
sont à l'origine d'une force de Laplace uniquement dans la zone
du champ B. Cette force s'oppose au mouvement de la plaque



- # Freinage par induction

La rotation du disque dans le champ
Magnétique est à l'origine d'un champ électromoteur
Radial. Ce champ crée un courant induit
(courant de Foucault). Les forces magnétiques
Exercées sur ce courant freinent la rotation du disque




- # Chauffage par induction

Plaque à induction : Le champ magnétique variable crée un champ électromoteur orthoradial:

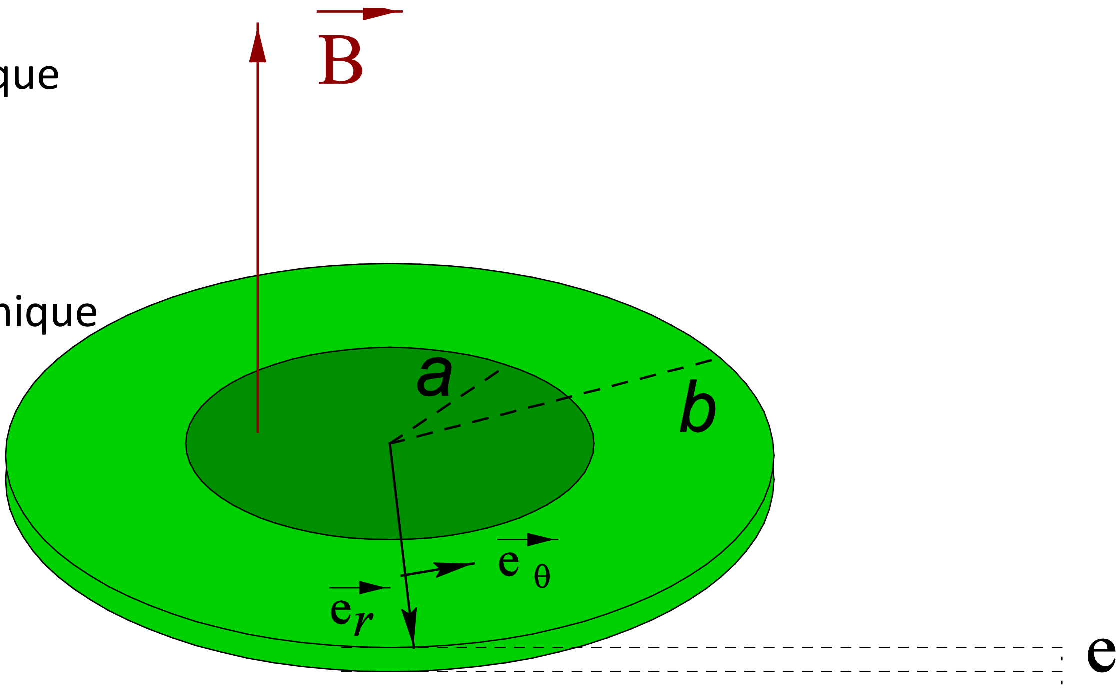
$$\vec{E} = E(\mathrm{r})\,\vec{e}_\theta$$

lui-même à l'origine d'un Courant volumique

$$\vec{J} = \mathrm{J}(\mathrm{r})\,\vec{e}_\theta$$

(courant de Foucault)

La puissance dissipée est $P = \gamma E^2$



# 7. Induction dans les circuits

Un circuit parcouru par un courant i(t) crée un champ magnétique propre $\vec{B}(t)_{propre}$. Ce champ propre est à l'origine d'une f.e.m. auto-induite (dite f.e.m. propre). C'est le phénomène d'auto-induction.

## 1. Auto-induction :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_{ext} + \overrightarrow{B}_{propre}$$

$$\Phi_{propre} = Li$$

$$e_{propre} = -\frac{d\Phi_{propre}}{dt} = -\frac{dLi}{dt}$$

$$e = e_{ext} + e_{propre}$$

$$\text{Si la bobine est rigide, on a :} e = -L\,\frac{di}{dt}$$

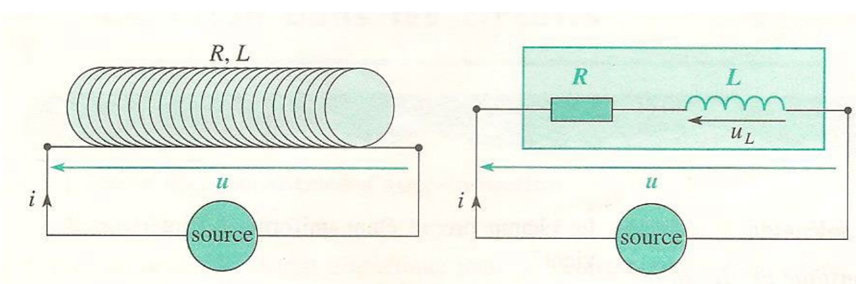
L: INDUCTANCE ou coefficient d'Auto-Induction (Henry)
En anglais Self Inductance ou « self »

- Exemple : Inductance d'un Solénoïde de longueur l et comportant N spires:

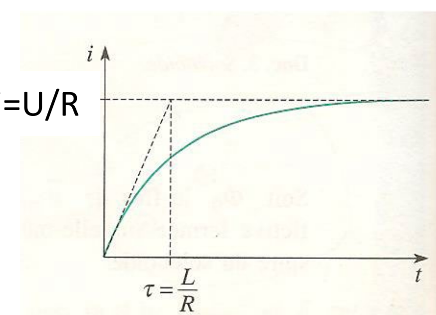
$$L = \frac{\Phi_{propre}}{i} = \mu_0 N^2 \frac{S}{l}$$

2. Loi d'Ohm généralisée : générateur de tension u

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} \qquad i = \frac{U}{R}[1 - \exp(-t\tau)] \text{ avec } \tau = L/R$$




i=U/R



# 3. Energie magnétique

## – Bilan énergétique du circuit

$$P_{source} = Ui = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} = P_{joule} + Li\frac{di}{dt}$$

$$P_{source} \neq P_{joule}$$

$$P_{mag} = Li\frac{di}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_{mag} = \int_0^t Li\frac{di}{dt}dt$$

$$\mathcal{E}_{mag} = \int_0^t \frac{1}{2}L\frac{di^2}{dt}dt = \int_0^t Ld(i^2/2) = \frac{1}{2}Li^2$$

- Expression de l’énergie magnétique

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$$

Densité d’énergie magnétique :

$$\frac{d\mathcal{E}_{mag}}{d\tau}$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2}Li^2 = \iiint \frac{d\mathcal{E}_{mag}}{d\tau} d\tau$$

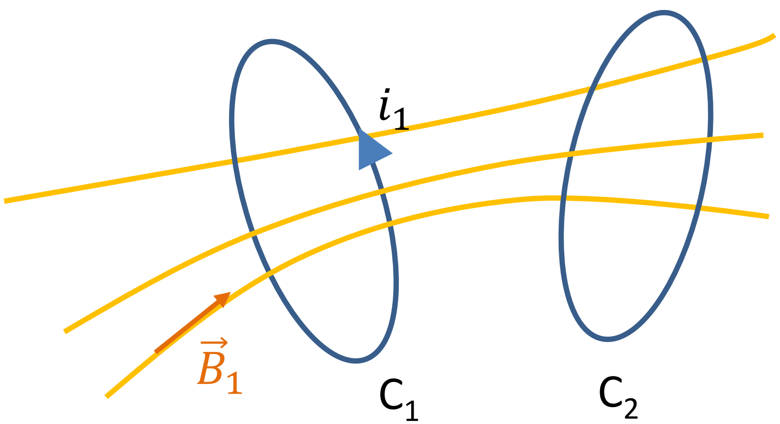
Cas du solénoïde de volume V=S l :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 \frac{S}{l} i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl = \frac{B^2}{2\mu_0} V = \frac{d\mathcal{E}_{mag}}{d\tau} V$$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_{mag}(\vec{r})}{d\tau} = \frac{B^2(\vec{r})}{2\mu_0}}$$

# 4. Induction mutuelle

On considère deux circuits $C_1$ et $C_2$. Le circuit $C_1$ est parcouru par un courant variable $i_1(t)$. Le champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ créé par $C_1$ induit une f.e.m. e(t) dans le circuit $C_2$. Le flux $\Phi_{12}$ du champ magnétique créé par $C_1$ à travers $C_2$ est donné par la relation $\Phi_{12} = M_{12} i_1$ où $M_{12}$ est appelé le coefficient d'induction mutuelle. De même, le flux $\Phi_{21}$ du champ magnétique créé par $C_2$ à travers $C_1$ est donné par la relation $\Phi_{21} = M_{21} i_1$




On montre et on admettra que $M_{21}$=$M_{12} = M$

La variation du flux $\Phi_{12}$ du champ magnétique créé par $C_1$ à travers $C_2$ est à l'origine d'une f.e.m. induite:

$$e_2(t) = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{di_1(t)}{dt}$$

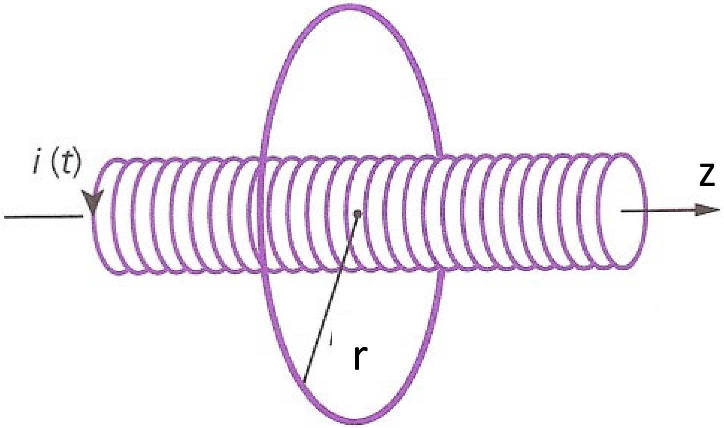
De même, si le circuit $C_2$ est parcouru par un courant $i_2(t)$, alors la f.e.m. $e_1$ induite dans le circuit $C_1$ est :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{di_2(t)}{dt}$$

Exemple : bobine circulaire et solénoïde. On a

$\Phi_{sb} = M_{sb} i(t) = \mu_0 n\, S\, i(t) = M\, i(t)$

Avec $M = \mu_0 n\, S$




Application: le transformateur