Propriétés des conducteurs et courants

Relations de passage pour E et B

Les conducteurs à l'équilibre électrostatique

1. Champ et potentiel dans un conducteur :

Dans un conducteur à l'équilibre électrostatique, le champ E est nul puisque les charges sont immobiles (pas de courant).

On en déduit que le conducteur est au même potentiel en tout point. C'est un volume équipotentiel.

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\nabla} V(\vec{r}) \Leftrightarrow V(\vec{r}) = Cte$$

2. Répartition des charges : $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = 0 \Leftrightarrow \rho(\vec{r}) = 0$

Pas de charges en volume

Dans un conducteur à l'équilibre, les charges sont réparties à la surface: densité surfacique de charge $\sigma(Q)$

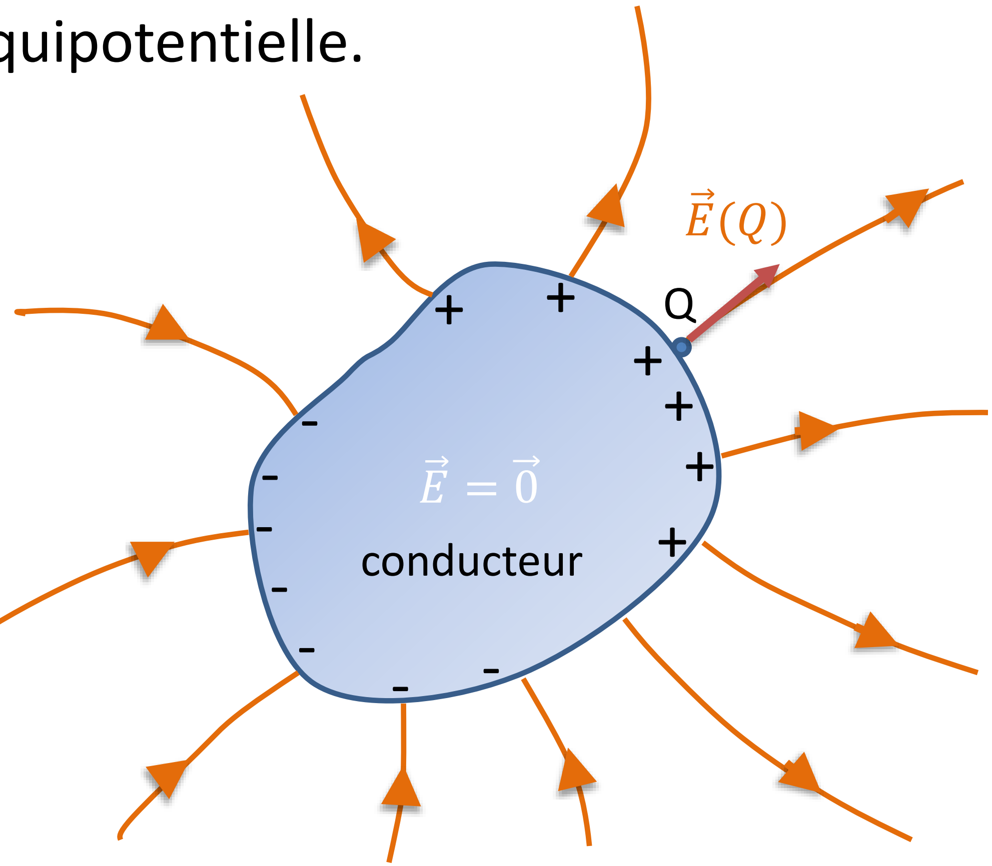
Il est donc impossible de définir le champ $\vec{E}$ à la surface d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. Mais on peut le définir au voisinage immédiat de la surface.

Au voisinage immédiat, le champ $\vec{E}$ est normal à la surface du conducteur car c'est une surface équipotentielle.

La relation de passage donne:

$$\vec{E} = \frac{\sigma(Q)}{\varepsilon_0}\vec{N}(Q)$$

$$P = \frac{\sigma^2(Q)}{2\varepsilon_0}$$

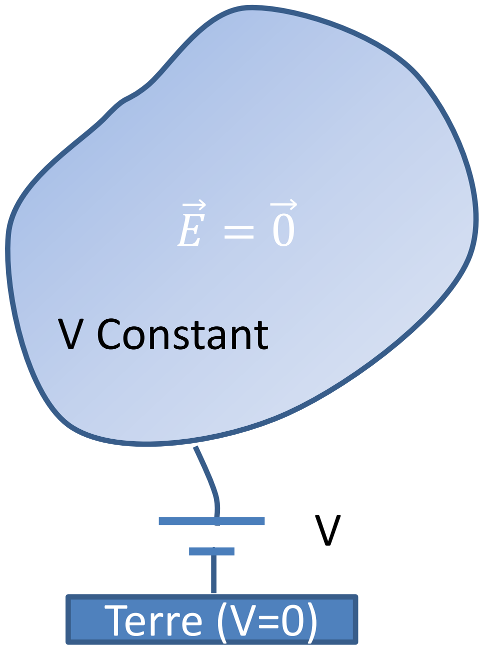


Force orientée vers l'extérieur

$d\vec{F} = P(Q)dS\ \vec{N}(Q)$

$\vec{N}(Q)$: vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur

Conducteur isolé mis au potentiel V :



Il existe une relation de proportionnalité entre la charge Q et le potentiel V :

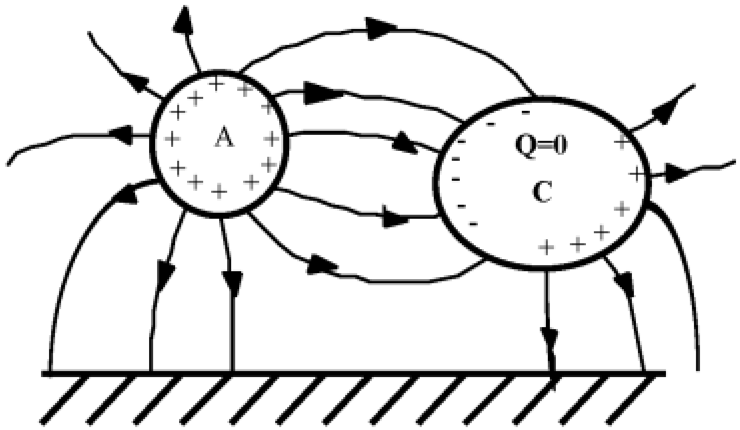
$$Q = \mathcal{C}\, V$$

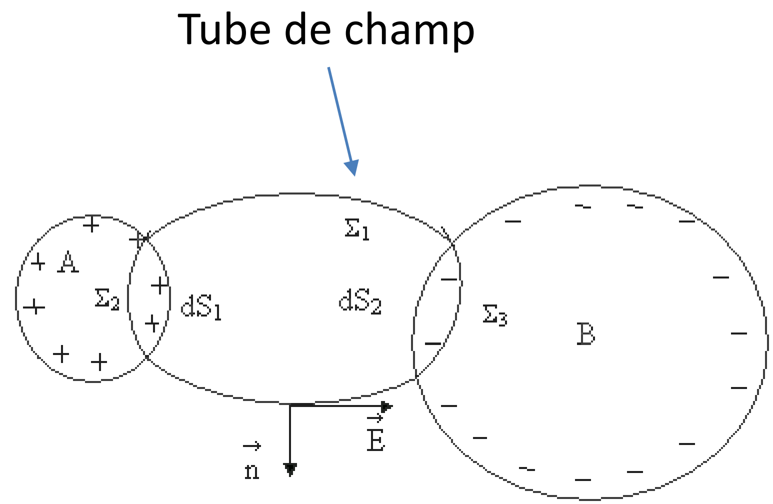
La constante $\mathcal{C}$ s'appelle la CAPACITE du conducteur

$\mathcal{C}$ s'exprime en Farad , ne dépend que de la géométrie du conducteur.

Exemple : sphère de rayon R : $\mathcal{C}=4\pi\varepsilon_0 R$

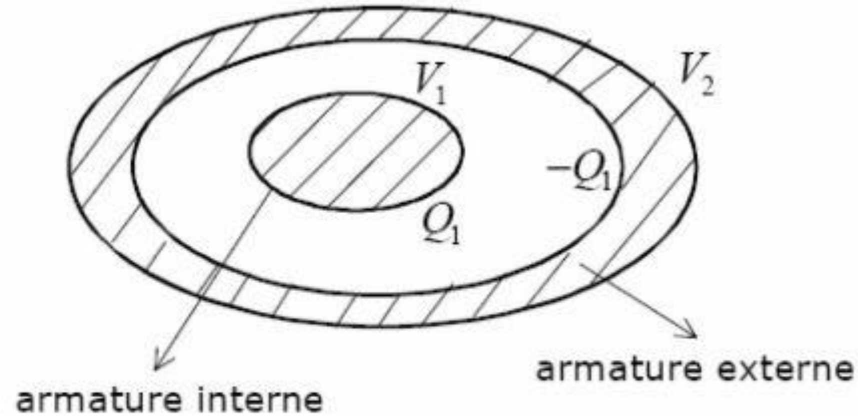
3. Ensemble de conducteurs





- Influence partielle
- Etat d'équilibre électrostatique
- Q=CV non applicable

4. Condensateurs:

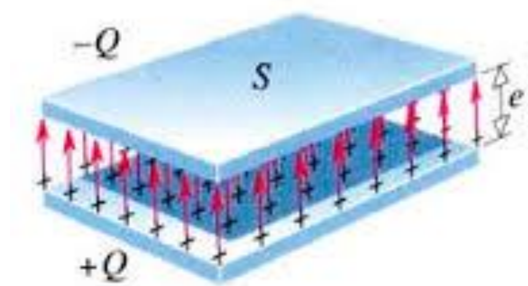


- Influence totale
- Toutes les lignes de champ

Partant d'une armature arrivent sur l'autre armature

$$\rightarrow Q_1 + Q_2 = 0$$

- Si le champ est nul à l'extérieur : $\sigma_{ext}=0 \rightarrow Q_{ext}=0$
- Application: stockage de l'énergie
- $Q=C\,\Delta V$: capacité du condensateur
- Exemple : Condensateur Plan



$$C = \varepsilon_0 S/\mathrm{e}$$

C s'obtient en calculant la circulation du champ E entre les armatures

5. Stockage de l'énergie à l'aide de conducteurs

Les formules des Energies s'obtiennent en utilisant la formule de l'énergie d'un ensemble de N charge q_i au potentiel V_i :

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

– Conducteurs : $E=Q^2/2C=1/2\ C\ V^2$

Supercondensateur

– Condensateurs :

$E=Q^2/2C=1/2\ C\ (\Delta V)^2$

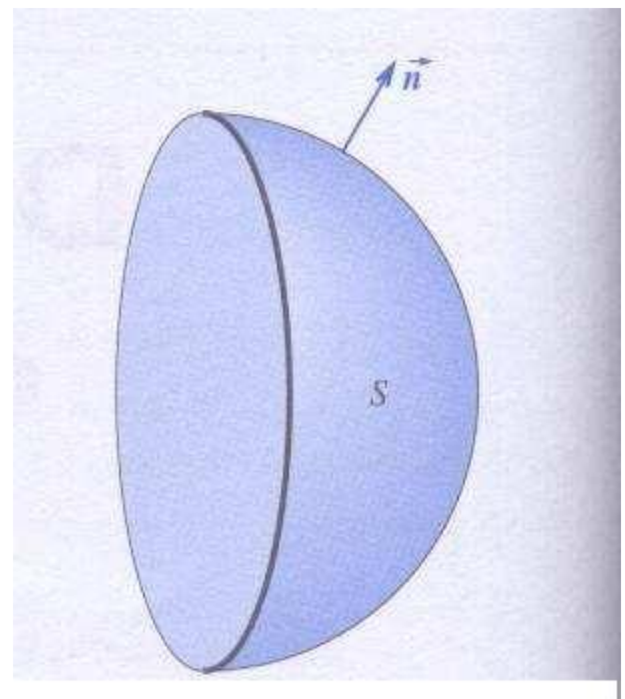
Rappels et compléments sur les courants

Distributions de courants

I. Charges en mouvement, courant et intensité électriques

L'intensité s'exprime en Ampères

$$\delta Q_m = I(S,t)\delta t$$



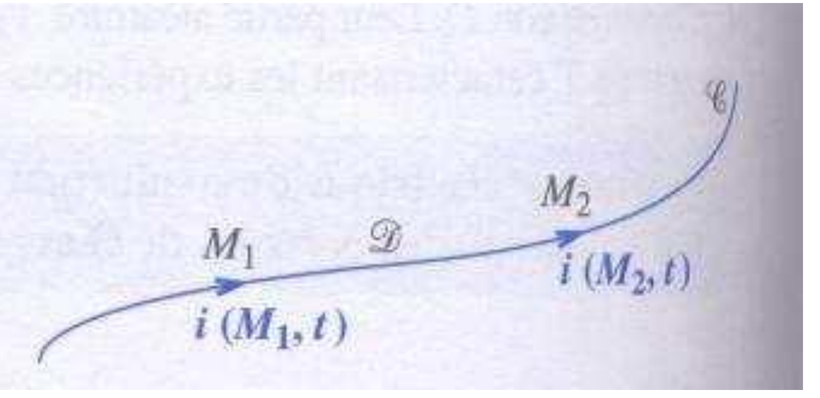
On distingue les courants:

- De conduction
- De convection
- particulaires

On appelle **courant électrique** tout mouvement d'ensemble (mouvement ordonné) de particules chargées dans un référentiel

II. Distributions de courants

1. Courants filiformes :



En régime permanent, un courant filiforme ne peut exister que sur un circuit fermé et l'intensité i a la même valeur en tout point d'un fil sans dérivation.

2. Courants volumiques

Le vecteur densité volumique de courant associé à un mouvement d'ensemble à vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m \vec{v}$$

Ce vecteur est une grandeur nivelée et la valeur de son module s'exprime en $A.m^{-2}$.

$$\delta Q_m = nqd\tau = nq\vec{v}\delta t.\overrightarrow{dS}$$

$$dI = nq\vec{v}.\overrightarrow{dS}$$

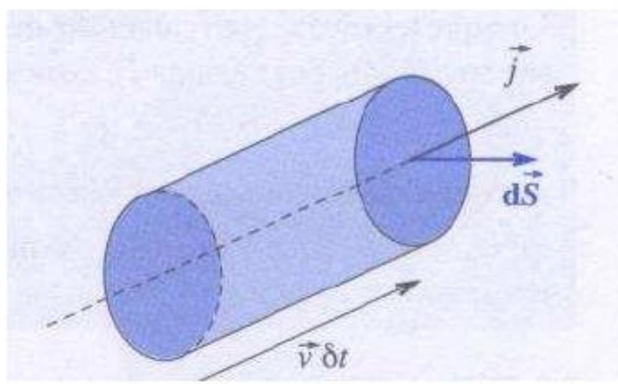


FIG. 4.3 – Les charges traversant la surface dS pendant le temps δt sont situées dans un cylindre de base dS et de génératrice $\vec{v}\delta t$

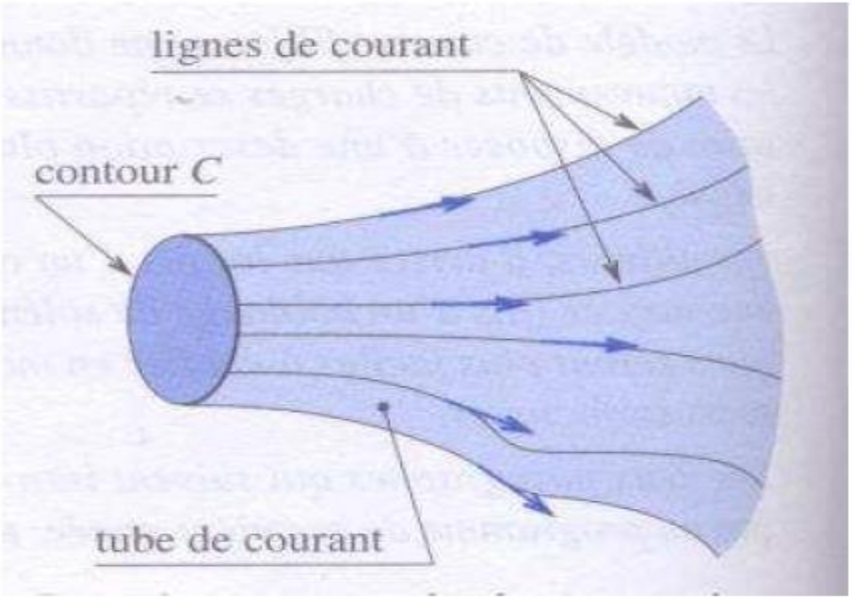


FIG. 4.4 – Lignes et tube de courant s'appuyant sur un contour $\mathcal{C}$

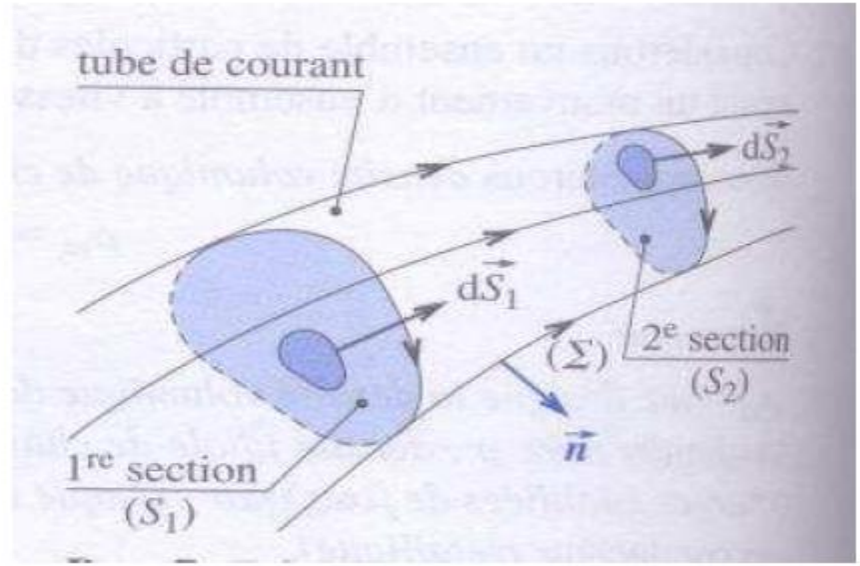


FIG. 4.5 – Flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$ à travers une surface fermée

L'intensité du courant électrique traversant une surface S est égale au flux du vecteur densité de courant $\vec{j}(\vec{r},t)$ à travers cette surface :

$$I(S,t) = \iint \vec{j}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS}$$

DÉFINITIONS : Une ligne de courant est une ligne en tout point de laquelle le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ est tangent.
Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour (figure 4.4).

En régime permanent statique (indépendant du temps), le vecteur $\vec{j}$ a un flux conservatif : le courant électrique est le même à travers toutes les sections d'un même tube de courant

3. Courants surfaciques

On considère une surface portant une densité surfacique de charges mobiles σ_m animées d'un mouvement d'ensemble à vitesse $\vec{v}$:

Le vecteur densité surfacique de courant associé à un mouvement d'ensemble à vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{j}_s = \sigma_m \vec{v}$$

Ce vecteur est une grandeur nivelée et la valeur de son module s'exprime en $A.m^{-1}$.

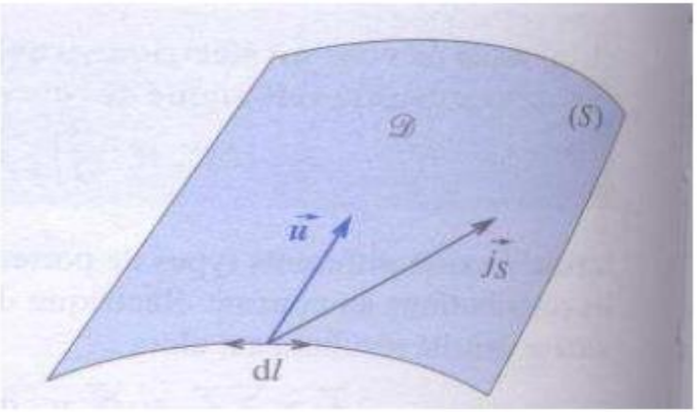


FIG. 4.6 – Vecteur densité de courant surfacique

Lorsque les courants circulent sur des nappes surfaciques, le vecteur densité surfacique de courants $\vec{j}_s$, associé est défini par :

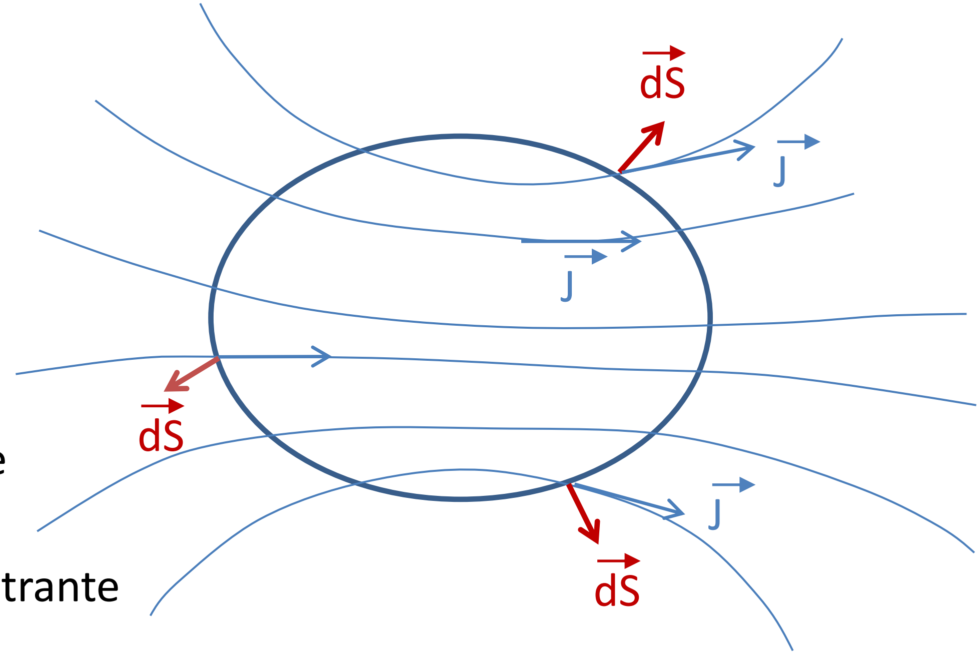
$$dI = \vec{j}_s.dl\vec{u} = \vec{j}_s.\vec{dl}$$

dI étant l'intensité traversant l'élément de longueur dl tracé sur la surface (figure 4.6). $\vec{u}$ est le vecteur unitaire normal à dl. L'expression de l'intensité I traversant une ligne $\mathcal{L}$ reliant deux points de la surface est donnée par l'expression :

$$I_{AB} = \int_A^B \vec{j}_s.dl\vec{u}$$

4. Conservation de la charge en régime stationnaire

Le flux sortant $\boldsymbol{\Phi}$ de $\vec{j}$ à travers la surface fermée S est égal à la variation de charge $\frac{dQ}{dt}$ dans le volume délimité par S.



Surface S fermée

En régime stationnaire, $\frac{dQ}{dt} = 0$. Il n'y a pas de variation de charge dans le volume délimité par la surface S. A chaque instant la charge entrante est égale à la charge sortante:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = \oiint d\Phi = \oiint \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = 0$$

D'après la relation d'Ostrogradski

$$\oiint_S \overrightarrow{J}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{J}\, d\tau$$

On en déduit que quelle que soit la surface S délimitant le volume V :

$$\Phi = \iiint_V \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{J}\, d\tau = 0$$

On en déduit qu'en tout point de l'espace:

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{J} = 0$$

C'est la relation locale de conservation de la charge électrique en régime stationnaire

Régime non stationnaire :

Supposons que $\frac{dQ}{dt} \neq 0$, ou que la charge Q varie au cours du temps.

Or $Q = \iiint \rho(M,t)d\tau$. On en déduit l'expression de l'intensité du courant sortant

$$I = -\frac{dQ(t)}{dt} = -\iiint \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t}\, d\tau$$

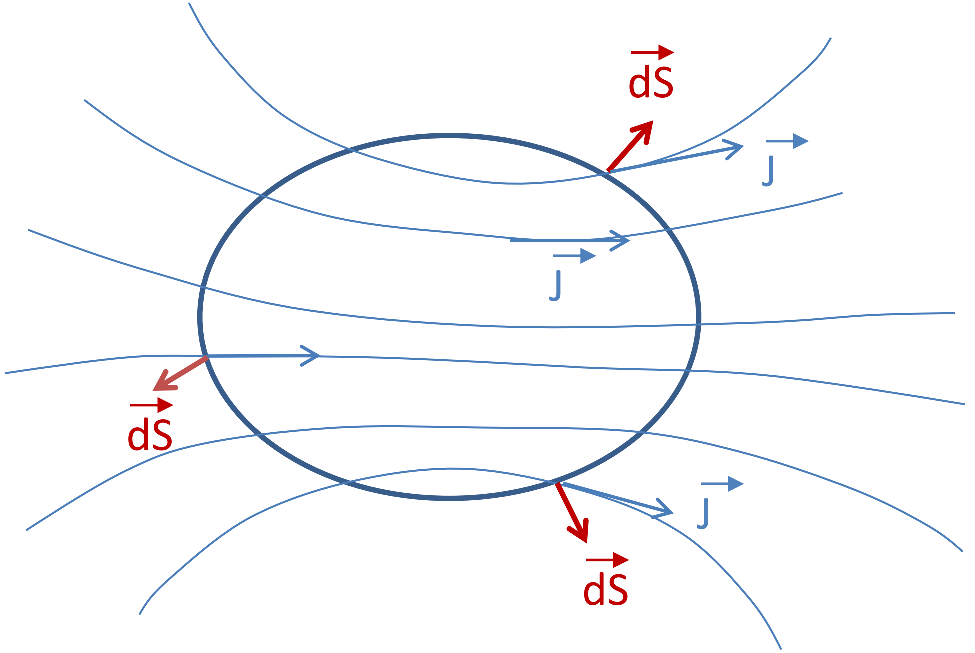
$$\text{Or } I = \oiint \vec{J}(M,t).\overrightarrow{dS} = \iiint \vec{\nabla}.\vec{J}(M,t)\, d\tau$$

On obtient : $\iiint \vec{\nabla}.\vec{J}(M,t)\, d\tau = -\iiint \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t}\, d\tau$

Ou encore $\iiint (\vec{\nabla}.\vec{J}(M,t) + \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t})\, d\tau = 0$

Finalement $\boxed{\vec{\nabla}.\vec{J}(M,t) + \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0}$

Equation de Conservation de la charge



Surface S fermée

5. Loi d’Ohm locale et intégrale

a. Loi d’Ohm locale

Il existe une relation entre le vecteur densité de courant $\vec{J}$ et le champ électrique $\vec{E}$:

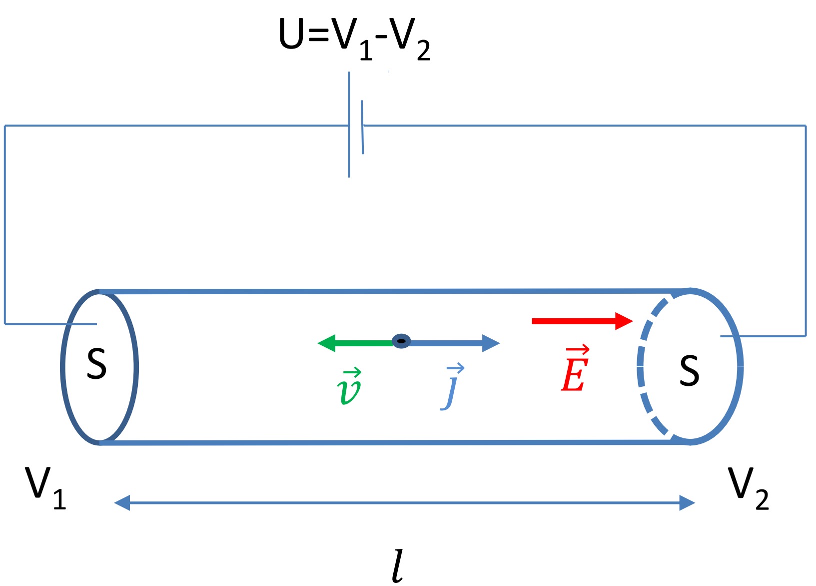
$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

Où γ est la conductivité électrique du milieu considéré. Ce milieu peut être un métal dans lequel les porteurs de charge sont les électrons ou un électrolyte (eau, solvant organique) dans lequel les porteurs de charge sont des ions (électrolyte de batterie ou pile). La conductivité s’exprime en Siemens/mètre (Sm^{-1}). γ dépend nombreux paramètres tels que la température, la densité des porteurs de charge…..Les métaux ont une conductivité élevée du fait de la présence d’électrons délocalisés. Voici quelques valeurs de conductivité pour des métaux:

Métal	Conductivité (10^6 S/m)
Argent (Ag)	63
Cuivre (Cu)	59,6
Or (Au)	45,2
Fer (Fe)	9,93
Plomb (Pb)	4,81

b. Loi d'Ohm intégrale :

Un conducteur rectiligne homogène de section S, de longueur l est soumis à une tension $U=V_1-V_2$. Le conducteur n'est donc plus à l'équilibre électrostatique. Il apparait au sein du conducteur un champ $\vec{E}$ à l'origine d'un vecteur densité de courant $\vec{J} = \gamma\vec{E}$. On cherche à relier U au courant I.



On a $I = \iint \vec{J}.\overrightarrow{dS} = J\,S = \gamma ES$ puisque $\vec{J}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires.

De plus $U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.\overrightarrow{dl} = E\,l$. On en déduit :

$U = \frac{l}{\gamma S}\,I = RI$ avec $R = \frac{l}{\gamma S}$ la résistance ohmique du conducteur.

L'unité de R est l'Ohm. Il existe une relation de proportionnalité entre la tension U appliquée à un conducteur ohmique et le courant I qui le traverse. Le coefficient de proportionnalité appelé résistance électrique dépend de la géométrie du conducteur.

6. Effet Joule.

Un conducteur ohmique parcouru par un courant $\vec{J}$ dissipe de l'énergie sous forme de chaleur. En effet, sous l'effet du champ $\overrightarrow{E}$, les charges atteignent une vitesse limite lorsque la force électrique est compensée par la force de frottement des porteurs de charge. Pour les électrons dans un métal, il s'agit de la force d'interaction des électrons avec le réseau d'atomes. La puissance dissipée par la force électrique est :

$$P = \vec{f}.\vec{v} = q\overrightarrow{E}.\vec{v}$$

On note $d\tau$ le volume élémentaire et n le nombre de porteurs de charge par unité de volume. La puissance volumique dissipée ${}^{dP}/_{d\tau}$ s'écrit :

$$\frac{dP}{d\tau} = nq\overrightarrow{E}.\vec{v} = \rho\vec{v}\,.\vec{E} = \vec{J}\,.\vec{E} = \gamma\, E^2$$

avec $\rho = nq$ la densité de charge.

Pour calculer la puissance totale dissipée dans le conducteur ohmique, on écrit

$$P = \iiint_V \frac{dP}{d\tau}\, d\tau = \iiint_V J\, E\, dS\, dl = \iint_S J\, dS \int_0^l E dl = I\;\; U$$

Soit

$$\boxed{P = UI = RI^2}$$