

Le champ Magnétique

Les équations locales pour le champ B

Le champ magnétique (Rappels)

I. Définitions $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$1G = 10^{-4}T$.

Ordre de grandeur de quelques champs magnétiques :

- Champ magnétique terrestre en France : composante horizontale $\simeq 0.2G$; composante verticale $\simeq 0.4G$
- Electro-aimant dans l'entrefer (bobines de Helmholtz) : 0.1T à 2T
- Bobine supraconductrice (pour la résonance magnétique nucléaire, IRM) : 5T à 50T. Un champ aussi intense ne peut être obtenu que dans un petit volume.

II- Loi de Biot et Savart

La contribution d'un élément de courant $\vec{dC} = i\vec{dl}$, situé au point P, au champ total $\vec{B}(M)$ créé en M par une distribution de courants est donnée par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{dC} \wedge \overrightarrow{PM}}{(PM)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (5.1)$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{PM} = r\vec{e}_{P \rightarrow M}$. Le coefficient μ_0 , appelé perméabilité du vide, vaut exactement $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$. H désigne le henry, unité d'inductance. L'unité de champ magnétique est le tesla dont le symbole est T.

μ_0 : perméabilité du vide

$$\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$$

B: Tesla

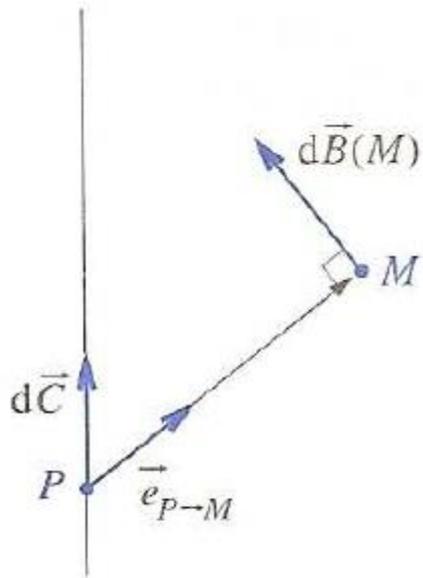


FIG. 5.1 – Le champ magnétique $d\vec{B}$ est perpendiculaire au plan contenant M et P et défini par les vecteurs $d\vec{C}$ et $d\vec{l}$.

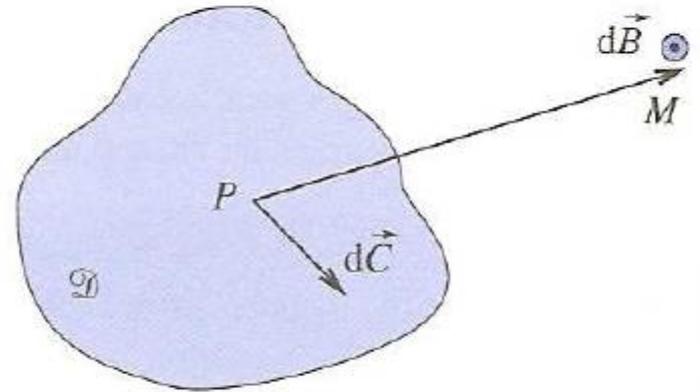
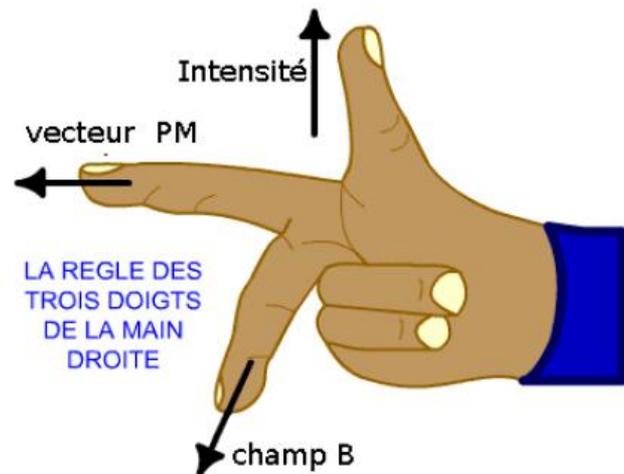


FIG. 5.2 – Champ magnétique d'une distribution de courants \mathcal{D}



L'expression du champ élémentaire \vec{dB} créé par un élément de courant \vec{dC} s'écrit :

– Dans le cas d'une distribution surfacique de courant : $\vec{dC} = \vec{j}_s dS$

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_s dS \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (5.2)$$

– Dans le cas d'une distribution volumique de courant : $\vec{dC} = \vec{j} d\tau$

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} d\tau \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (5.3)$$

• Distribution volumique

$$\vec{B}(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} d\tau \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (5.4)$$

• Distribution surfacique

$$\vec{B}(M) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_s dS \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (5.5)$$

• Distribution linéique (filiforme)

$$\vec{B}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (5.6)$$

- * En pratique, pour connaître la direction et le sens du champ magnétique en un point M quelconque, on utilise la règle dite des “trois doigts” de la main droite. Le courant entre par la base du pouce et ressort par son extrémité, l’index indique le sens du vecteur \vec{PM} et le sens de \vec{B} est donné par le majeur (voir figure 5.3). Le pouce, l’index et le majeur formant une base orthogonale directe.
- * Pour une distribution volumique de courants, l’intégrale de Biot et savart permet le calcul du champ magnétique en tout point de l’espace.
- * Dans le cas d’une distribution surfacique de courant, cette intégrale n’autorise pas le calcul du champ sur la nappe de courant. Nous verrons qu’il existe une discontinuité finie de la composante tangentielle à la surface du champ magnétique à la traversée de cette surface.
- * Pour une distribution filiforme, on exclut de calculer le champ magnétique en un point du circuit car l’intégrale 5.6 y est alors divergente.

III - Exemples de distributions de courants

– Distribution linéique de courant

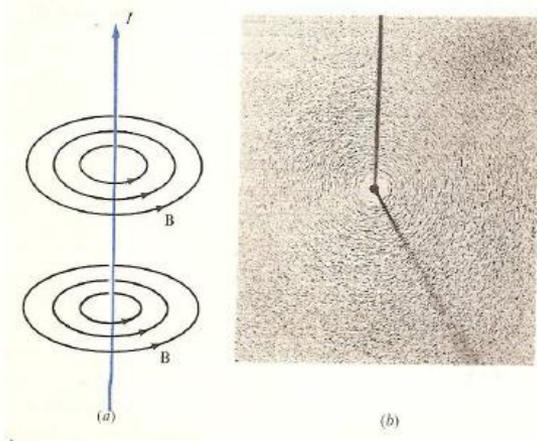
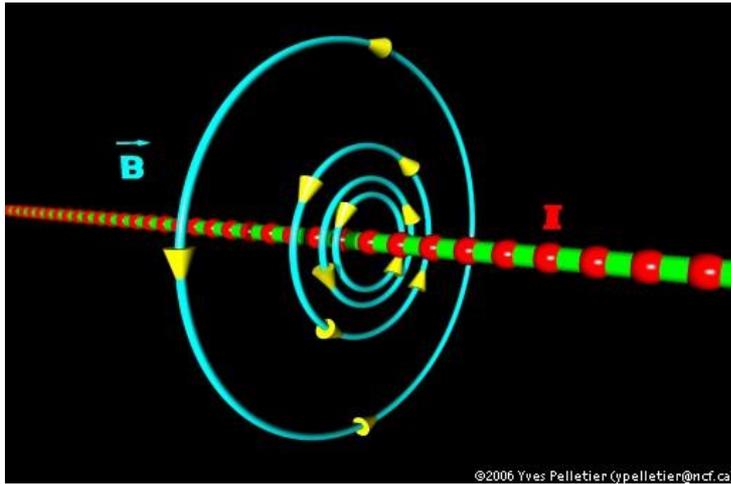


FIG. 5.5 – Lignes de champ magnétique d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant i .

Fil infini parcouru par un courant I

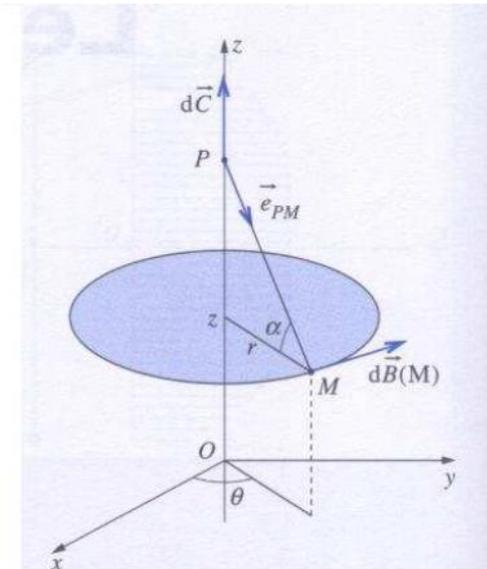


FIG. 5.4 – Champ élémentaire $d\vec{B}$ créé en un point $M(r, \theta, z)$ par un élément de courant $i d\vec{l}$ situé en un point P du fil rectiligne.

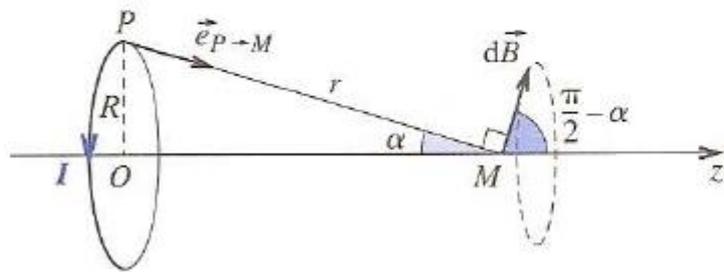


FIG. 5.6 – Champ élémentaire $d\vec{B}$ créé en un point M de l'axe Oz par un élément de courant $i d\vec{l}$ situé en un point P de la spire.

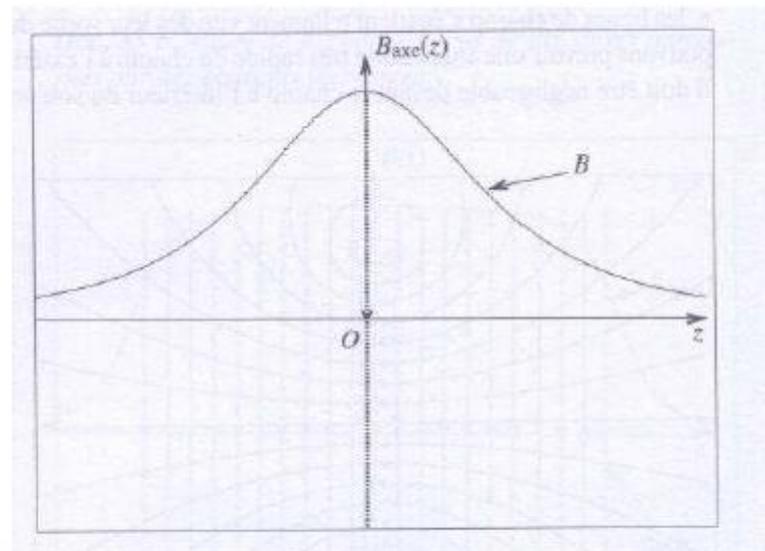
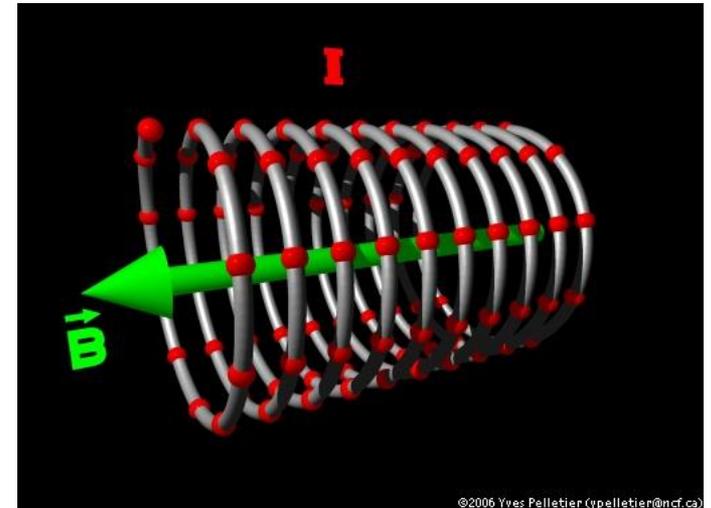
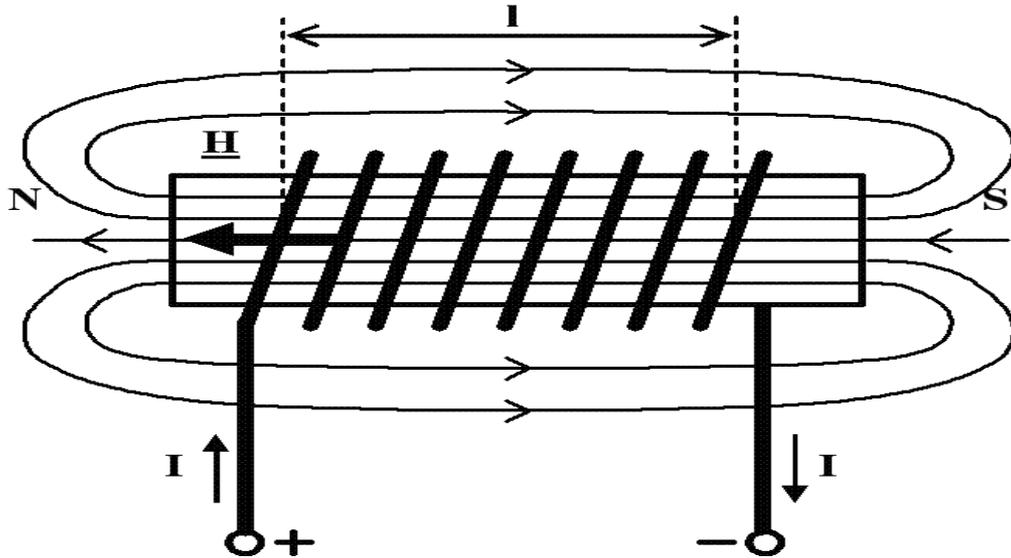


FIG. 5.7 – Champ magnétique sur l'axe d'une spire

Bobine circulaire plate:

Solénoïde:



– Distribution de courants volumiques et surfaciques

- Plan de symétrie Π

Si M appartient au plan de symétrie Π , alors:

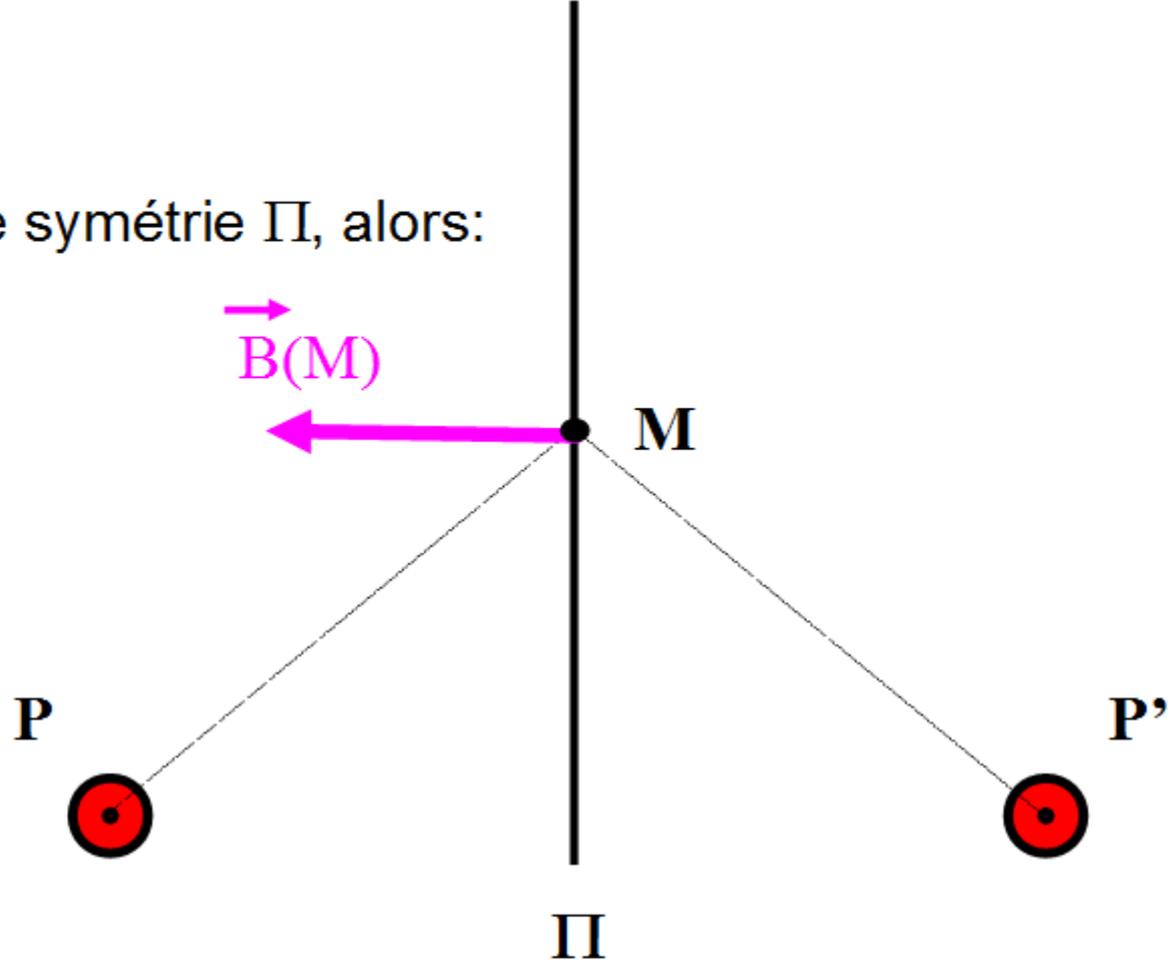
$$\begin{aligned} M' &= M \\ \vec{B}_{//}(M) &= -\vec{B}_{//}(M) \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\vec{B}_{//}(M) = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{B}(M) \perp \Pi$$



Le champ magnétique est *perpendiculaire* au plan de symétrie Π .

- Plan de symétrie inversion

Si M appartient au plan de symétrie Π^* , alors:

$$M' = M$$
$$\vec{B}_\perp(M) = -\vec{B}_\perp(M)$$

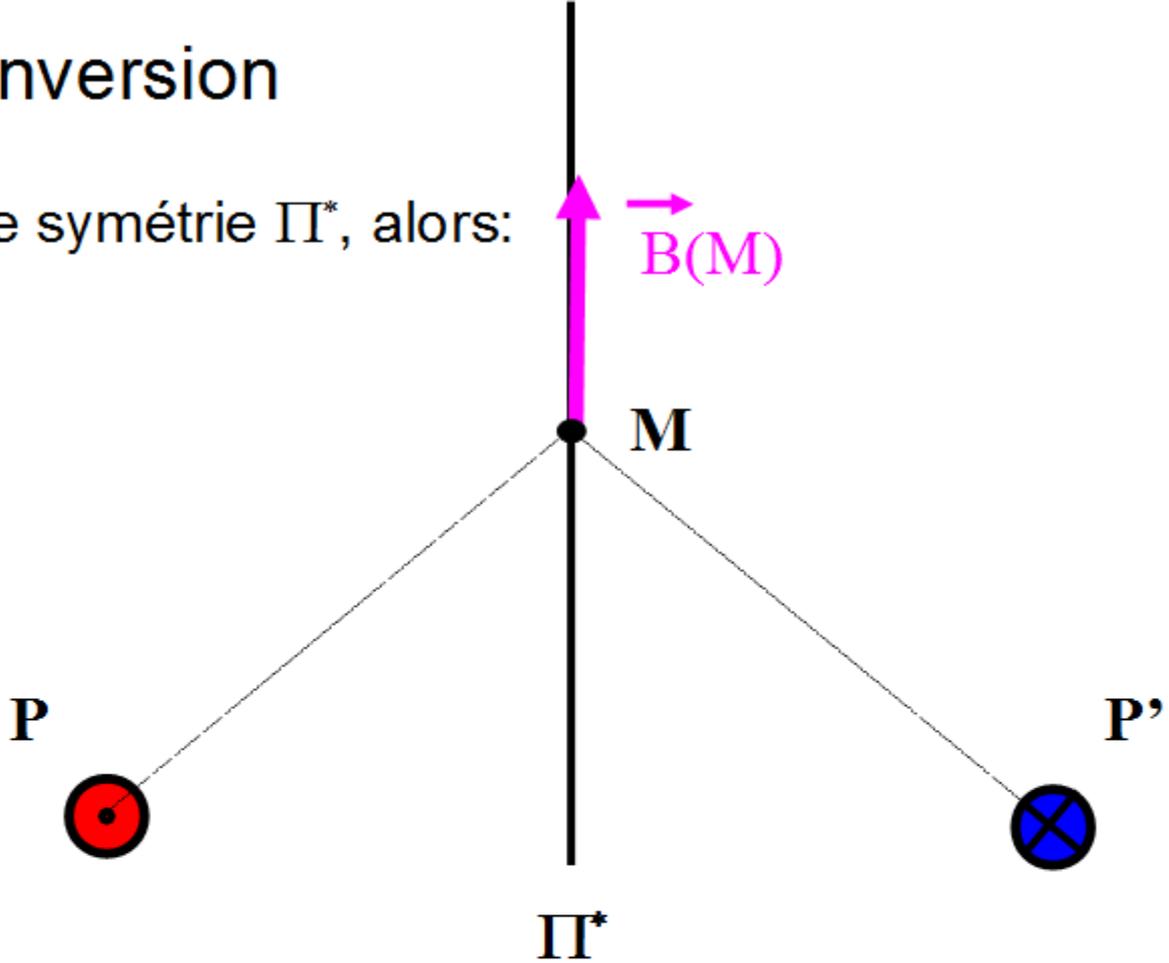
ce qui implique :

$$\vec{B}_\perp(M) = \vec{0}$$

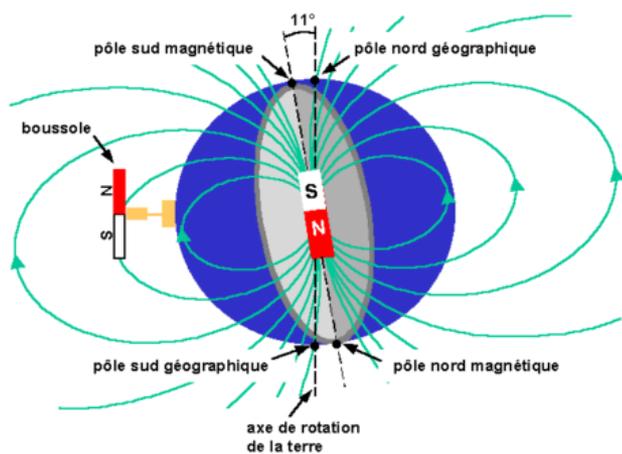
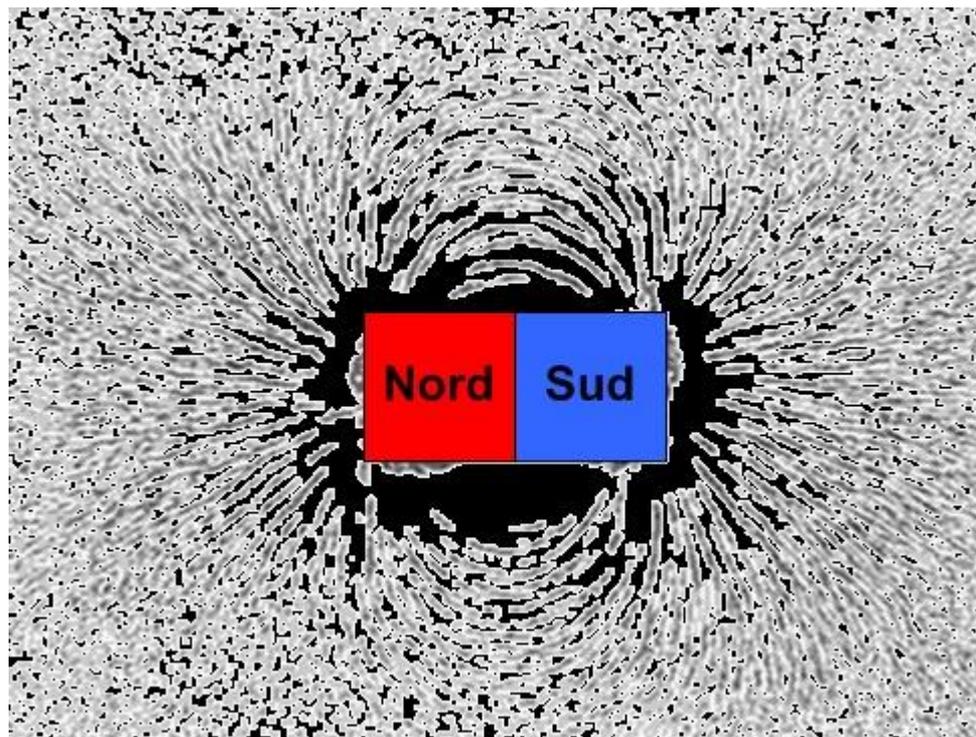
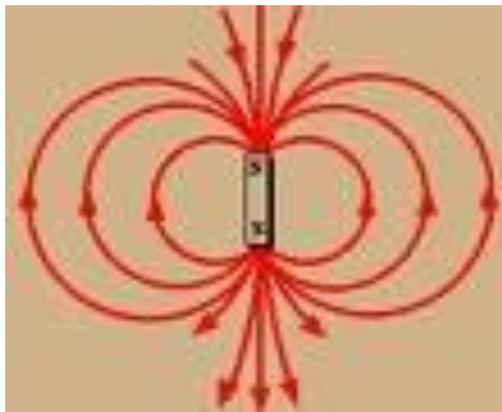
On en déduit :

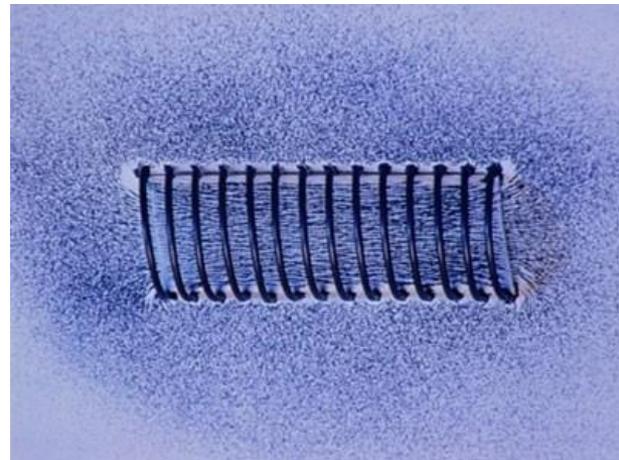
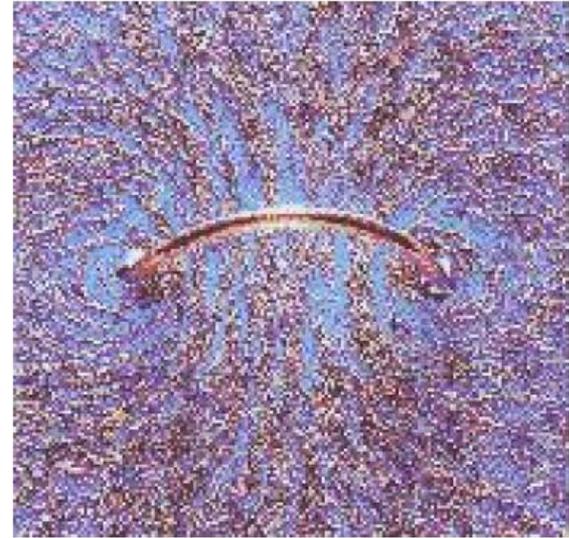
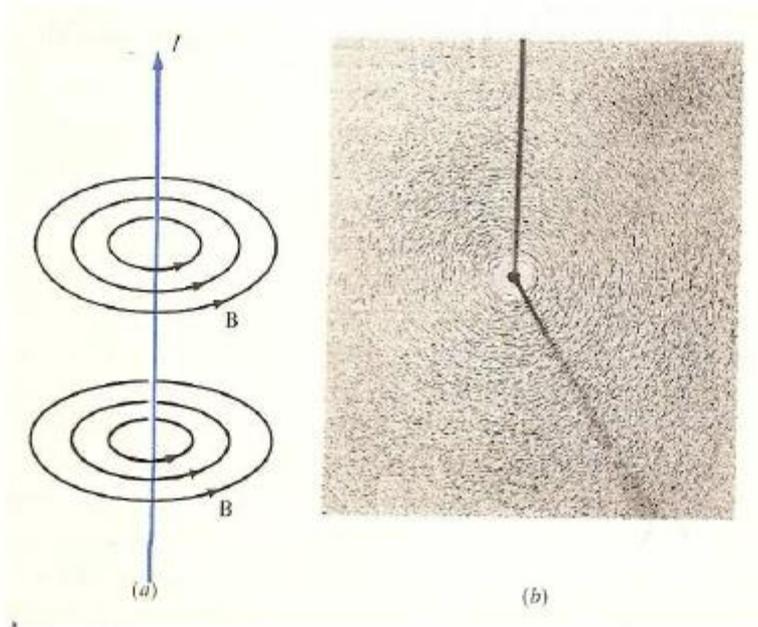
$$\vec{B}(M) // \Pi$$

Le champ magnétique *appartient* au plan de symétrie-inversion Π^* .



- sources de champ magnétique





II. Théorème d'Ampère

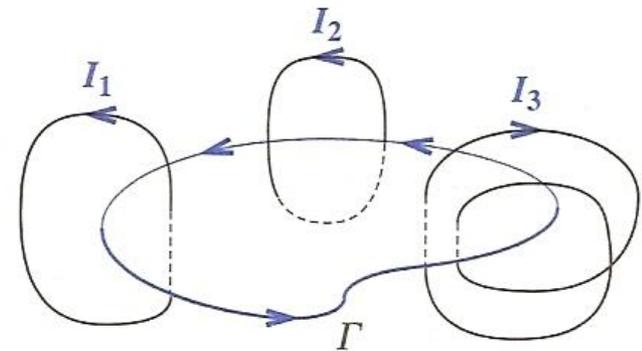
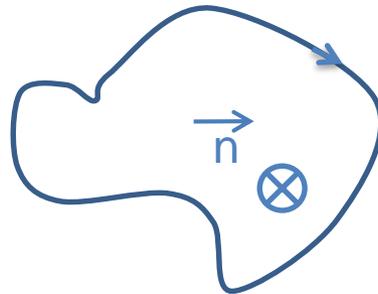
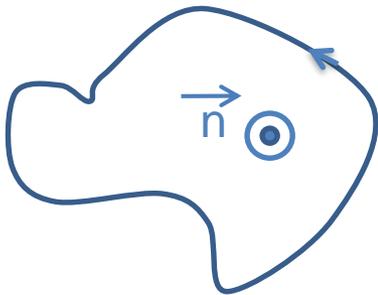
La circulation du champ magnétostatique \vec{B} créé par un ensemble de courants sur un contour Γ orienté est égale à la somme des courants enlacés multipliée par μ_0 :

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}} \quad (5.2)$$

$\varepsilon_k = 1$, si I_k traverse S orienté par Γ dans le sens de \vec{n}

$\varepsilon_k = -1$, si I_k traverse S orienté par Γ dans le sens de $-\vec{n}$

$\varepsilon_k = 0$, si I_k ne traverse pas S.

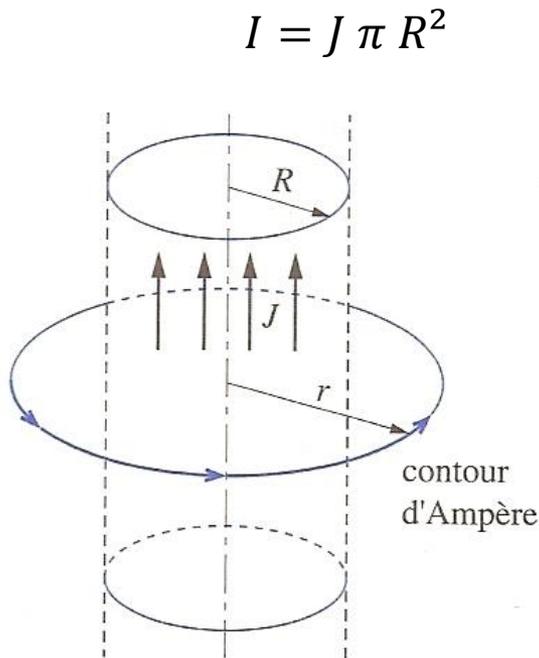


III. Utilisation du théorème d'Ampère

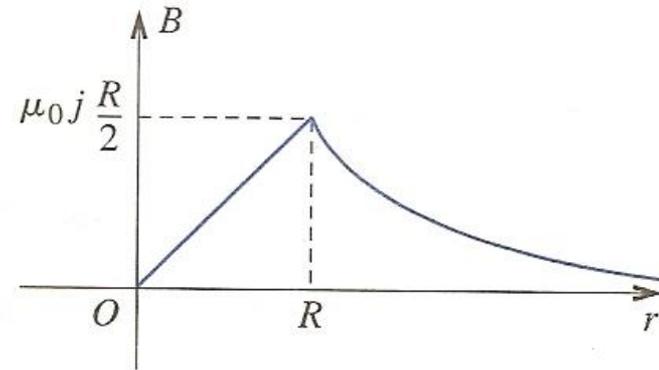
Le théorème d'Ampère permet une détermination rapide du champ magnétostatique pour des distributions de courants de symétries élevées. Après détermination de la forme du champ à l'aide de considérations de symétrie, son application à un contour fermé, orienté, de géométrie adaptée aux symétries du problème permet de déterminer l'amplitude du champ magnétostatique

1. Distribution de courant à symétrie cylindrique

a) Courant volumique $\vec{J} = j \vec{u}_z$ $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$



$$\begin{cases} r < R \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 J r}{2} \\ r > R \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 J \pi R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



a) Courant surfacique

$$I = J_s 2 \pi R$$

$$\begin{cases} r < R \Rightarrow B_\theta(r) = 0 \\ r > R \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 J_s 2 \pi R}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$

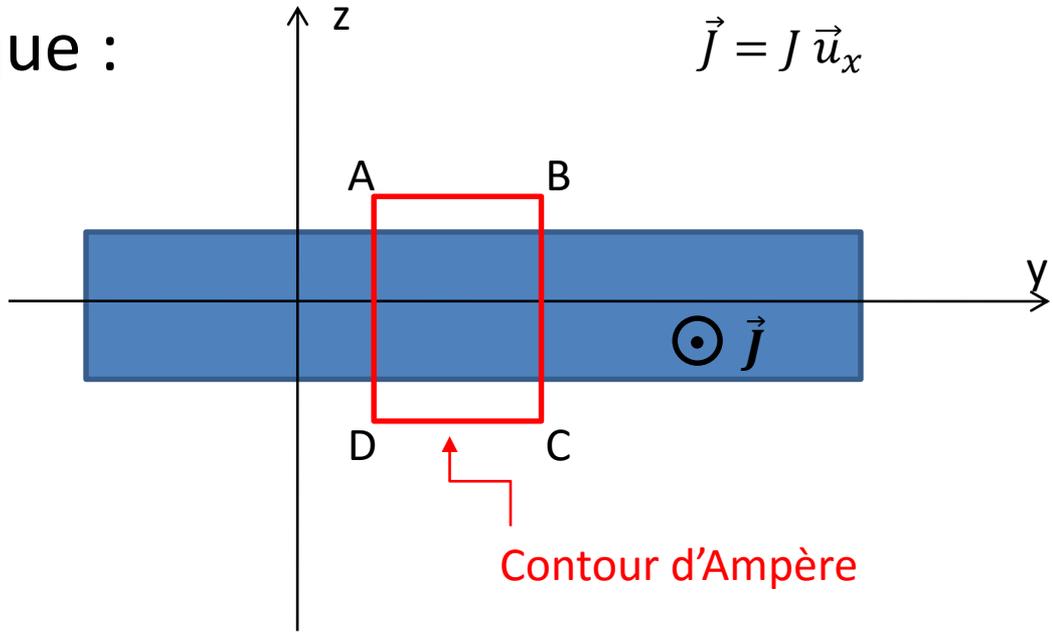
2. Nappe de courant infinie selon x et y :

a) Courant volumique :

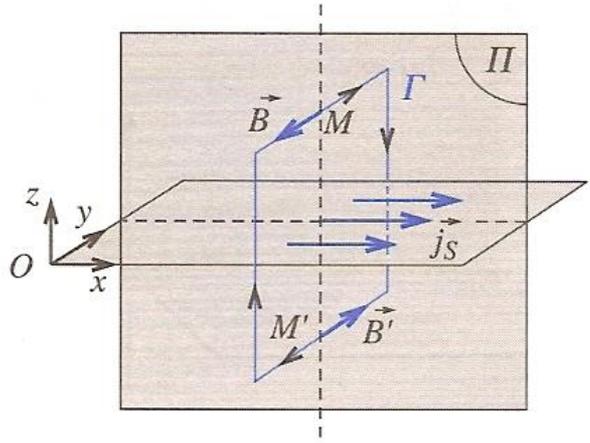
Symétries et invariances

$$\vec{B} = B_y(z) \vec{u}_y$$

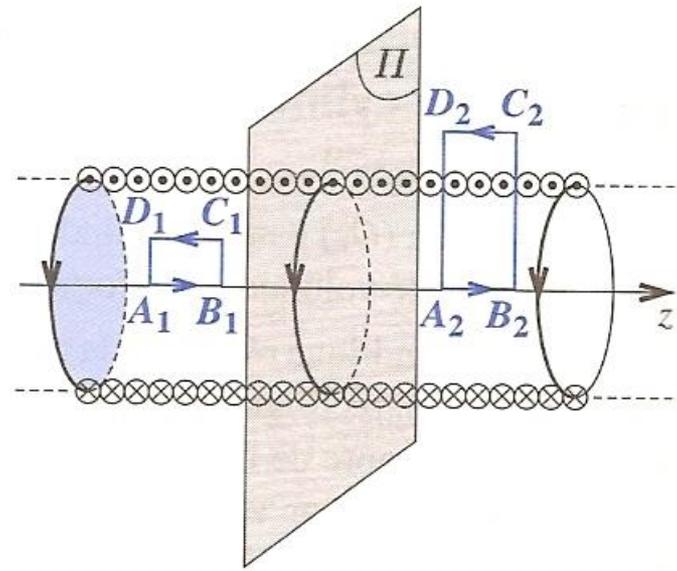
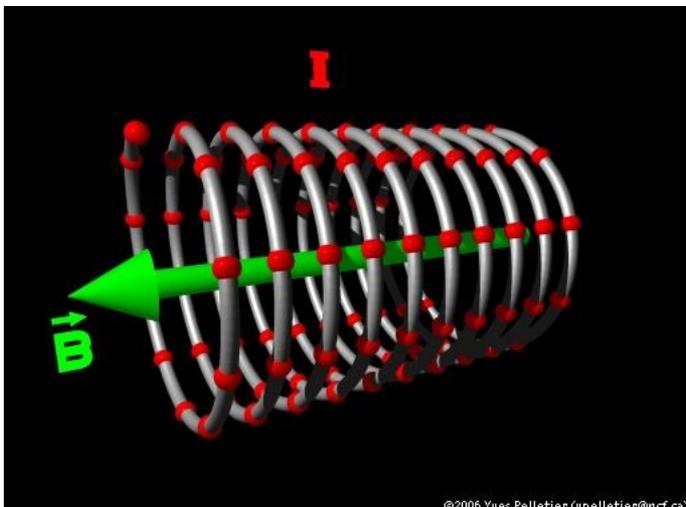
$$\vec{J} = J \vec{u}_x$$



a) Courant surfacique



3. Courant solénoïdal (solénoïde infini)



n spires par unité de longueur

Symétries et invariances : $\vec{B} = B_z(r) \vec{u}_z$

Champ sur l'axe du solénoïde : $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ (Biot et Savart)

Théorème d'Ampère:

$$\begin{cases} r > R \Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \\ r < R \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z \end{cases}$$

Contour d'Ampère : rectangle ABCD

Equations locales du champ B statique

I. Flux de B :

Loi de Biot et Savart implique $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

or $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oiint \vec{B} d\vec{S} = 0$ d'après Green-Ostrogradski

Le flux du champ magnétique est conservatif

Equation locale de
maxwell Φ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

valable en régime variable!!!

II. Forme locale du théorème d'Ampère :

Stokes :

$$\text{Stokes : } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Ampère : } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Equation locale de
Maxwell Ampère :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Ne s'applique pas aux
autres formes de distributions
de courants (linéiques,
ou surfaciques)!!!!

III. Potentiel vecteur A

1. Définition :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Le champ magnétique étant à divergence nulle, c'est un champ de rotationnel.

En effet, quel que soit le champ de vecteur \vec{A} , on a toujours : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$

Par analogie avec le champ électrostatique qui dérive d'un potentiel scalaire, nous appellerons potentiel vecteur le champ de vecteurs \mathbf{A} dont dérive le champ magnétique.

Le potentiel vecteur est défini à un gradient d'une fonction scalaire près.

2. Exemple du champ B uniforme :

$$\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$$

Les solutions cartésiennes sont évidentes. On peut aussi chercher des solutions de la forme :

$$\vec{A} = A_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

Il n'y a pas qu'une seule solution possible.

3. Circulation du potentiel vecteur :

En appliquant la relation de Stokes à la circulation du potentiel vecteur sur un contour fermé, on obtient :

$$\begin{aligned}\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \iiint \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \iiint \vec{B} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

4. Expression du potentiel vecteur :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{PM} d\tau$$

Distribution volumique de courants

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{PM}$$

Distribution linéique de courants

Conséquence : Le potentiel vecteur est **polaire**. Il se comporte comme un vecteur polaire vis-à-vis des opérations de symétrie.

4. Condition de Jauge :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Jauge de Coulomb

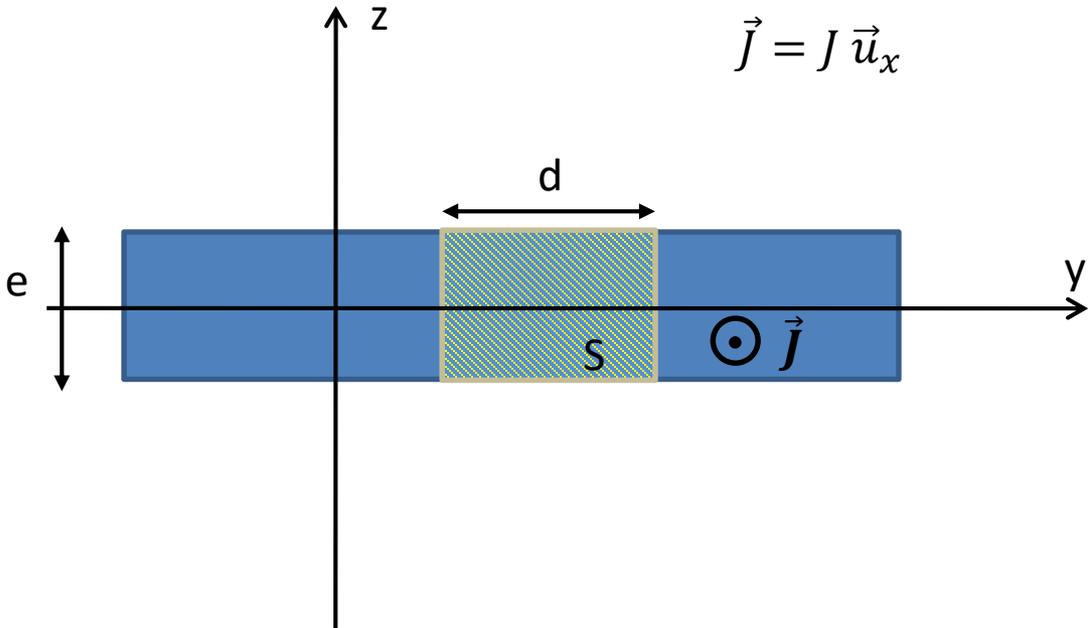
Cette contrainte n'implique pas l'unicité de **A**

5. Nappe de courant et fil parcourus par un courant uniforme **J**

- Calcul direct de **B**
- Calcul de **A**

- Forme locale du Théorème d'Ampère.

$$\vec{B} = B_y(z) \vec{u}_y$$



$$\vec{J} = J \vec{u}_x$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M)$$

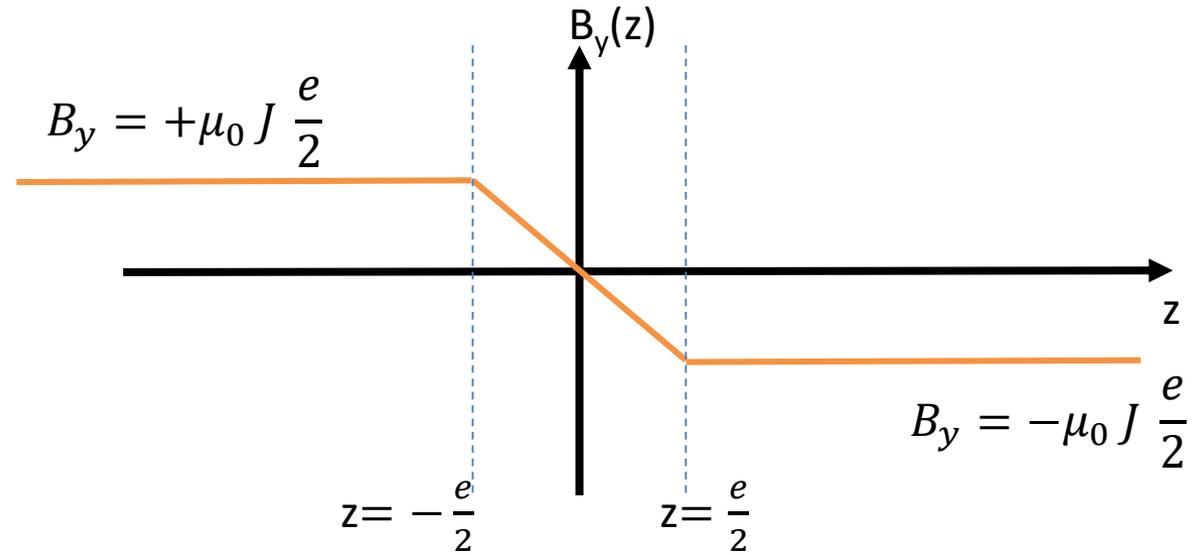
$$|z| < \frac{e}{2} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 J \Rightarrow B_y = -\mu_0 J z$$

$$|z| > \frac{e}{2} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow B_y = Cte = \pm \mu_0 J \frac{e}{2}$$

La constante est fixée par continuité de B(z) en $z = \pm \frac{e}{2}$.

Rappel: Le champ magnétique \vec{B} est continu partout où il est défini.

- Graphe $B_y(z)$



- Retrouver ce résultat à l'aide de la forme intégrale du théorème d'Ampère.
- Calculer un potentiel vecteur \vec{A} .
- Exercice Calculer B et A pour la distribution de courant cylindrique

- Courant volumique : Le courant I passant à travers la surface $S = e d$ s'écrit :

$$I = \frac{dQ}{dt} = JS = J e d =$$

- Si l'épaisseur e de la plaque tend vers 0 alors $\vec{J} \rightarrow \vec{J}_s$. Le courant volumique \vec{J} devient surfacique $\vec{J}_s = J_s \vec{u}_x$. Le courant surfacique circule sur le plan xOy .

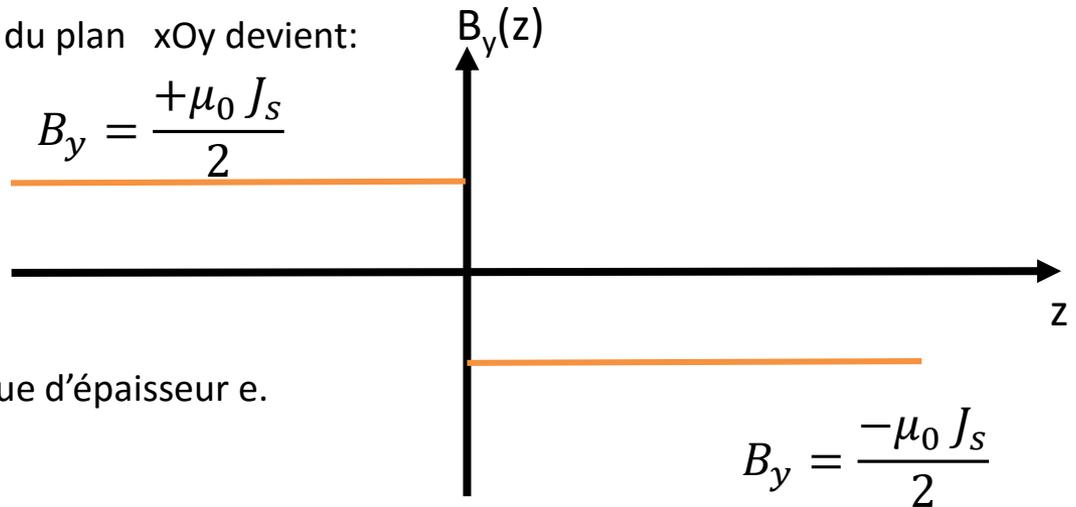
- Courant surfacique : Le courant I passant à travers le segment parallèle à Oy , de longueur d s'écrit :

$$I = \frac{dQ}{dt} = J_s d$$

- On a $I = \frac{dQ}{dt} = J_s d = J e d$. Par identification, on obtient $J_s = J e$. (vérifier l'homogénéité)

Finalement, le champ magnétique en dehors du plan xOy devient:

$$B_y = \frac{\pm \mu_0 J e}{2} = \pm \frac{\mu_0 J_s}{2} \quad (+ \text{ si } z < 0 \text{ et } - \text{ si } z > 0)$$



On a remplacé Je par J_s dans l'expression du champ magnétique à l'extérieur de la plaque d'épaisseur e .

On remarque qu'au passage de la surface, la composante tangentielle est discontinue. La discontinuité vaut $\mu_0 J_s$. La discontinuité du champ magnétique s'écrit:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \quad \vec{B}_{z=0^+} - \vec{B}_{z=0^-} = \mu_0 J_s \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\mu_0 J_s \vec{u}_y$$

La relation de passage est bien vérifiée.