Champ $\vec{E}$ et potentiel V (rappels)
Les équations locales pour le champ $\vec{E}$ et le potentiel V

I. Rappels :

- Le champ créé par N charges est la somme des champs créés par chaque charge : c'est **le principe de superposition**

- Charges ponctuelles :

$$\overrightarrow{E}_{(q_i, i=1,\ldots,N)}(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{(P_iM)^3} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r_i}}{r_i^3}$$

- Distributions de charges continues :

$$\overrightarrow{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}\, dq_p$$

Distribution volumique

Un volume élémentaire $d\tau$ contient la charge $dq_p = \rho(P)\, d\tau$. On obtient :

$$\overrightarrow{E}(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}\, d\tau$$

Distribution surfacique

Une surface élémentaire dS contient la charge $dq_p = \sigma(P)\, dS$. On obtient :

$$\overrightarrow{E}(M) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}\, dS$$

Distribution linéique

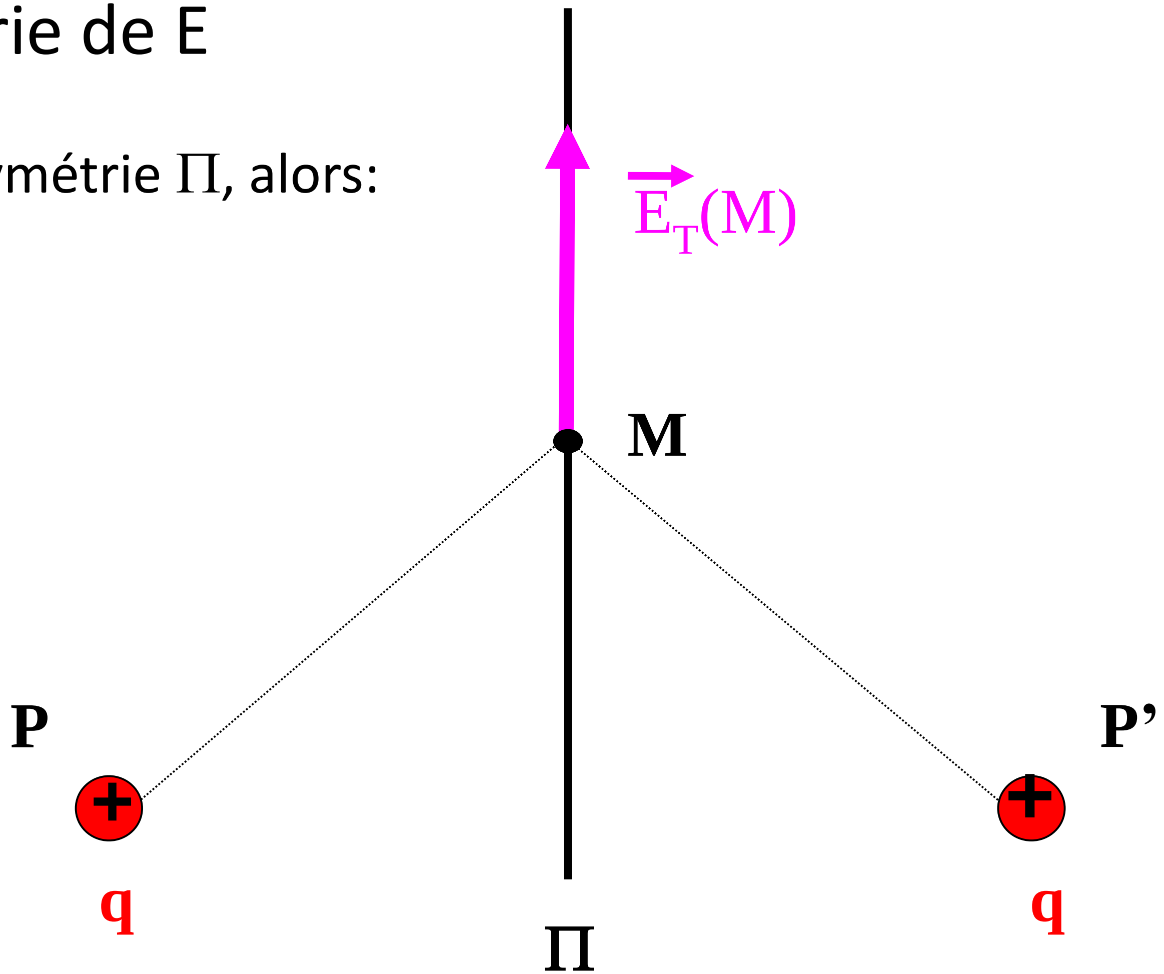
Une longueur élémentaire dl contient la charge $dq_p = \lambda(P)\, dl$. On obtient :

$$\overrightarrow{E}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}\, dl$$

- Propriétés de symétrie de E

Si M appartient au plan de symétrie Π, alors:

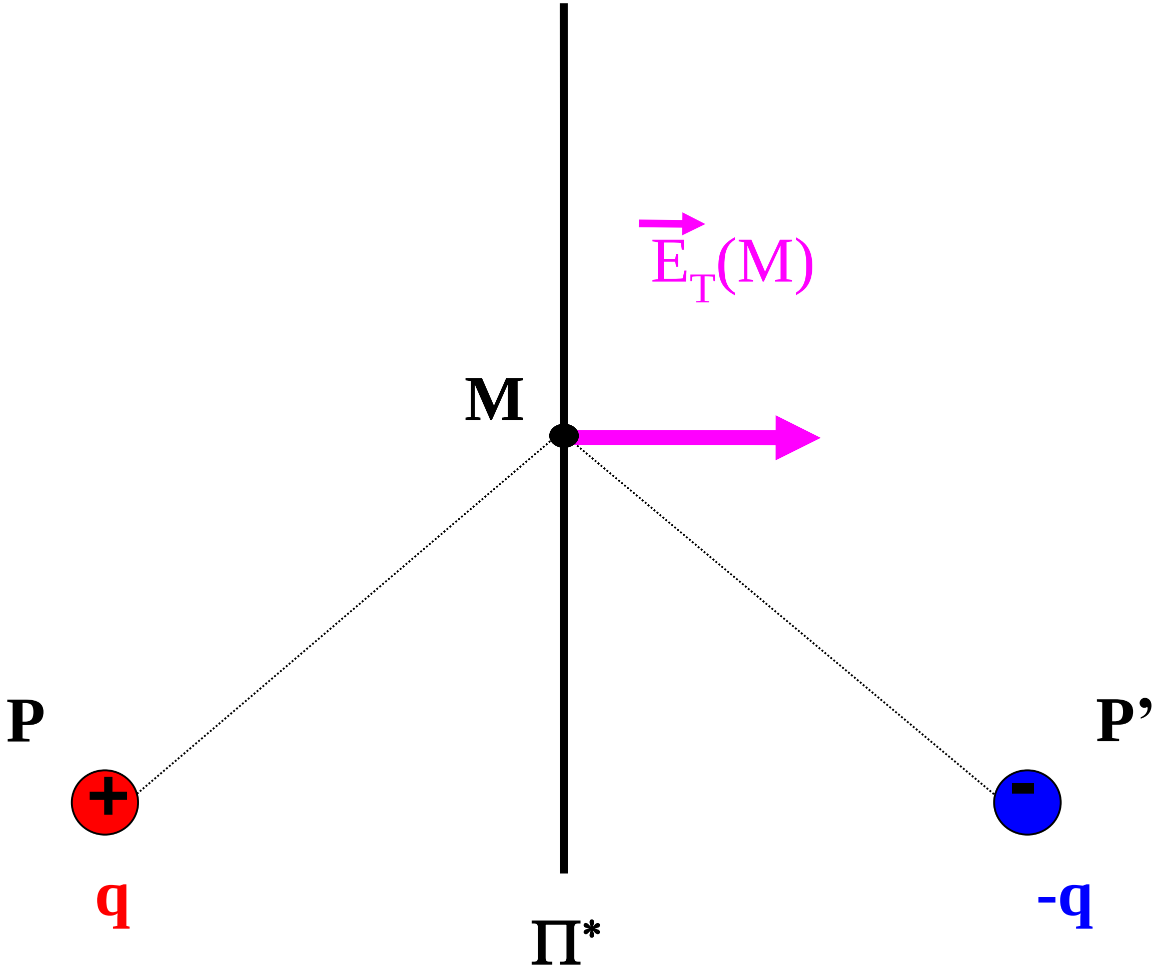
$\overrightarrow{E(M)} \in \Pi$



Le champ électrique ***appartient*** au plan de symétrie Π.

Si M appartient au plan de symétrie-inversion Π^*, alors:

$\overrightarrow{E_T}(M) \perp \Pi^*$



Le champ électrique est ***perpendiculaire*** au plan de symétrie-inversion Π^*.

- <u>Direction du champ électrostatique</u>

  – Le champ électrostatique a les propriétés de symétrie d'un vecteur ***polaire*** ou " vecteur vrai ". Cela signifie qu'il a les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charges qui le créent.

  – En pratique, pour trouver la direction du champ électrostatique en un point M, il suffit d'identifier deux plans de symétrie Π de la distribution de charges passant par M. Le champ E(M) est parallèle à la droite matérialisant l'intersection des deux plans. Si un plan de symétrie-inversion Π^* passe par M (situation plus rare en pratique), le champ E(M) est perpendiculaire à ce plan Π^*.

  – Les plans de symétrie et symétrie-inversion peuvent simplifier l'étude du champ grâce aux propriétés de symétrie des composantes du champ.

  – Les invariances de la distribution de charges permettent de connaître les variables d'espace dont dépendent les composantes du champ.

Potentiel électrostatique

I. Circulation du Champ E :

1. Définition
2. Circulation du champ créé par une charge ponctuelle

$$\vec{E}.\vec{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e_r}.\vec{dr}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d(-\frac{1}{r})$$

$$C_{AB(\Gamma)} = \int_{A(\Gamma)}^{B} \vec{E}.\vec{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B})$$

La circulation du champ électrostatique ne dépend pas du chemin suivi. La circulation est conservative

3. Champ de gradient

$$\vec{E}.\vec{dr} = -dV(\vec{r})$$

$$dV(\vec{r}) = (\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz) = \vec{\nabla}V(\vec{r}).\vec{dr}$$

Par identification : $V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + Cte$ Potentiel électrostatique

$$C_{AB(\Gamma)} = \int_{A(\Gamma)}^{B} \vec{E}.\vec{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}) = V(A) - V(B)$$

II. Potentiel électrostatique d'une distribution de charges

1. Circulation du Champ: (principe de superposition)

La circulation du champ électrostatique créé par une distribution de charges est conservative. On en déduit que la circulation du champ électrostatique sur un contour (courbe fermée) est nulle (fig.3.2) :

$$\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0 \tag{3.3}$$

Ce résultat est indépendant du contour choisi

$$V(B) = V(A) + \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M) = -\vec{\nabla} V(M)$$

Conséquences : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ et les lignes de champ sont ouvertes

2) Expression du potentiel créé par une distribution de charges :

L'expression intégrale du potentiel, s'annulant à l'infini, créé par une distribution de charges $\mathcal{D}$ d'extension finie est de la forme :

$$V(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\delta q_P}{PM}$$

– Ensemble de charges ponctuelles :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 MP_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

– Distribution volumique de charges :

$$V(M) = \iiint_{\tau} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{PM} d\tau$$

– Distribution surfacique de charges :

$$V(M) = \iint_{S} \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{PM} ds$$

– Distribution linéique de charges :

$$V(M) = \int_{L} \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{PM} dl$$

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}\left(V(M)\right)$$

Le potentiel V est défini à une constante C près

Comment fixer C?

Exemples

3) Topographie du potentiel électrostatique:

1

2

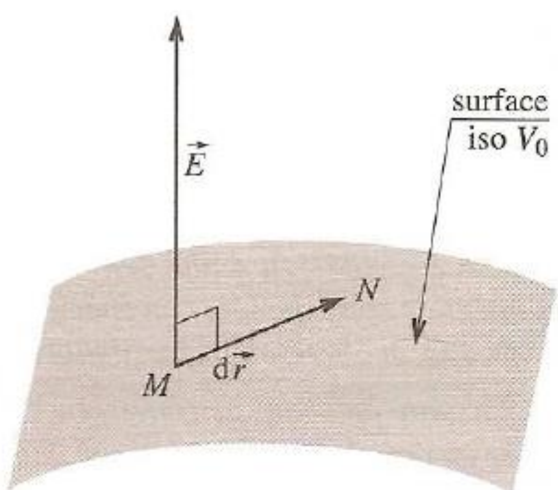


FIG. 3.3 – Surface équipotentielle V_0 et champ $\vec{E}$ $(V(M) = V(N))$

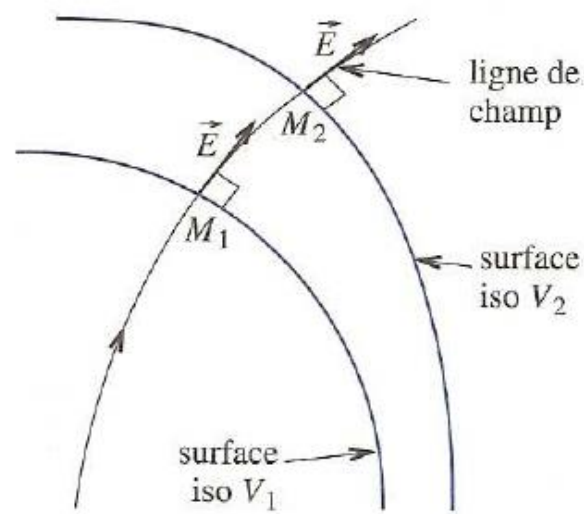
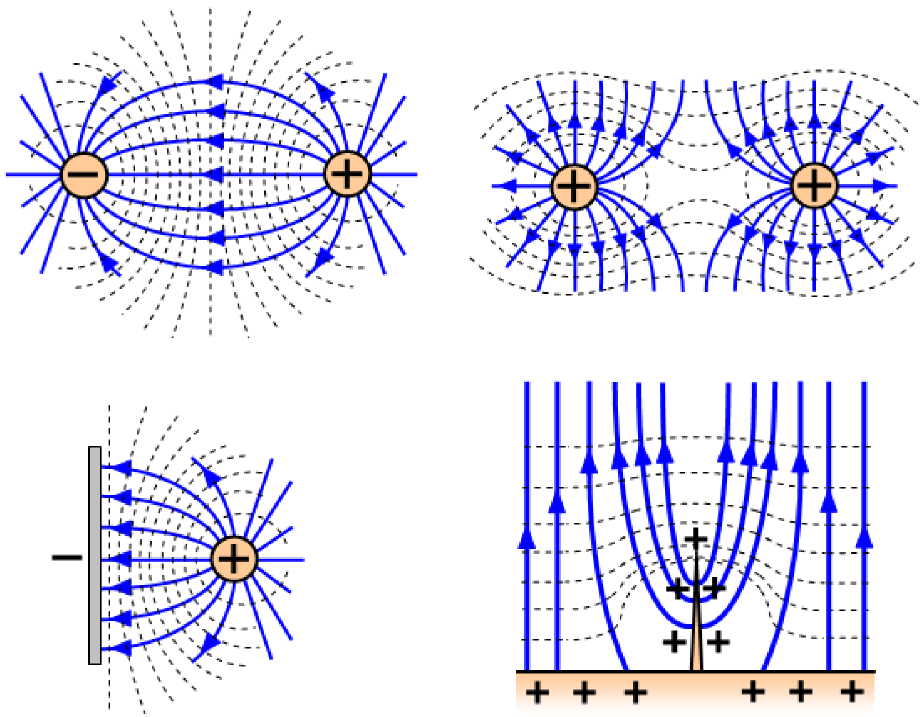


FIG. 3.4 – $\vec{E}$ est orienté dans le sens des potentiels décroissants

$$V_2 - V_1 = V(M_2) - V(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} -\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dr} < 0. \qquad V(N) = V(M) - \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dr}$$

Le champ électrostatique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants



(resourcefulphysics.org)

4. Energie potentielle électrostatique

1. Energie potentielle d'une charge placée dans un champ E.

- Travail de la force électrostatique.

$$\delta W = \vec{f}.\vec{dl} = q\vec{E}.\vec{dl} = -q\vec{\nabla}V.\vec{dl} \qquad W_{A\to B} = -q(V_B - V_A)$$

- Energie potentielle.

L'énergie potentielle d'interaction entre une charge q et un champ électrostatique $\vec{E}$ créant le potentiel V est :

$$\mathcal{E}_p = qV$$

$$\vec{f} = q\vec{E} = -\overrightarrow{grad}.\mathcal{E}_p$$

2. Energie potentielle d'interaction de 2 charges ponctuelles.

$$\mathcal{E}_p = W_{op} = W_{\infty\to M_2} = \int_{\infty}^{M_2} -q_2\vec{f}_{q_1}(q_2).\overrightarrow{dr} = \int_{\infty}^{M_2} \frac{-q_2q_1\overrightarrow{dr}.\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{M_1M_2}$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}\left[q_1.V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)\right]$$

3. Généralisation (N charges) :

3 charges

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\left[q_1\left(V_2(M_1) + V_3(M_1)\right) + q_2\left(V_1(M_2) + V_3(M_2)\right) + q_3\left(V_1(M_3) + V_2(M_3)\right)\right]$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i V(M_i)$$

N charges :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(M_i)$$

– distribution de charges volumique caractérisée par une densité volumique de charges $\rho(\vec{r})$:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\tau \tag{3.18}$$

– distribution de charges surfacique caractérisée par une densité surfacique de charges $\sigma(\vec{r})$:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\iint_S \sigma(\vec{r})V(\vec{r})dS \tag{3.19}$$

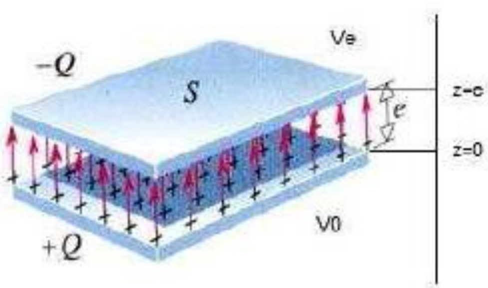


FIG. 3.5 – Condensateur plan.

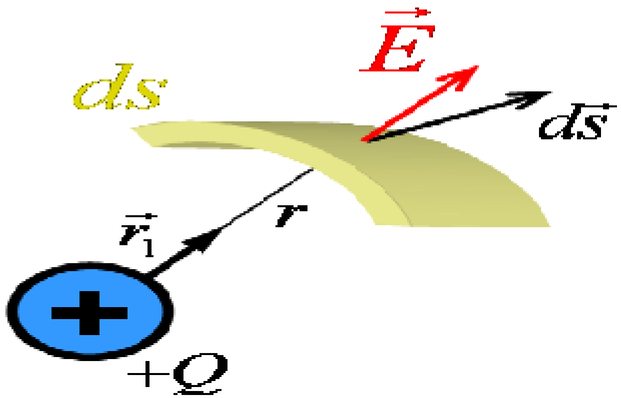
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_e = \frac{1}{2}Q(V_0 - V_e) = \frac{1}{2}C(V_0 - V_e)^2$$

$$\mathcal{C}_{z=0\,\rightarrow\,z=e} = \int_{z=0}^{z=e} \vec{E}.\vec{dl} = \int_{z=0}^{z=e} \frac{Q}{\varepsilon_0\ S}\vec{e}_z.dz\vec{e}_z = \frac{Qe}{\varepsilon_0\ S}$$

Théorème de Gauss

1. Flux d'un champ de vecteurs
   a. Flux élémentaire

$$d\Phi = \overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dS}$$

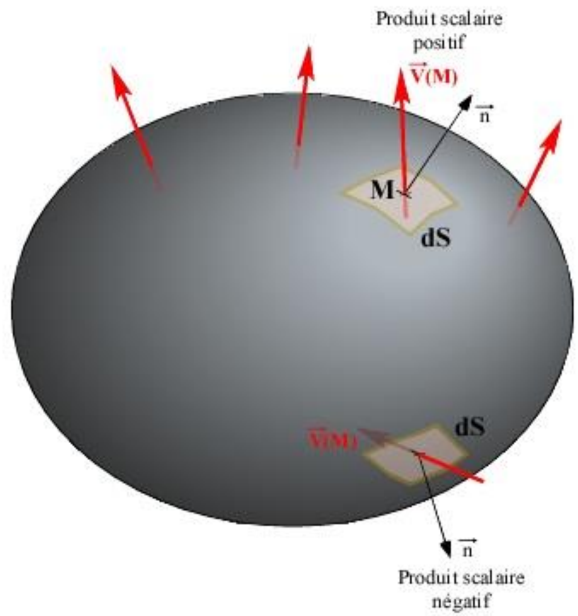


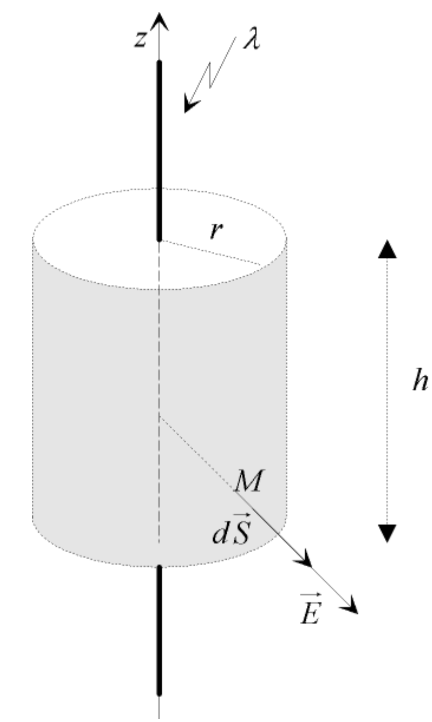
   b. Flux à travers une surface S

$$\Phi = \iint d\Phi = \iint \overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dS}$$

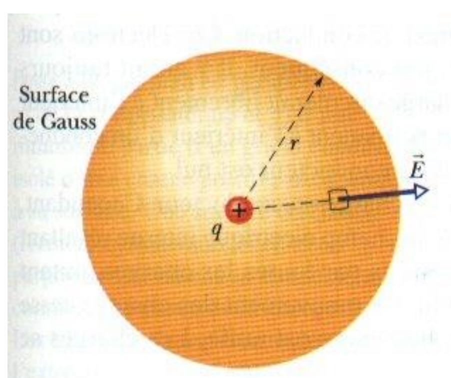
   c. Flux à travers une surface fermée

$$\Phi = \oiint d\Phi = \oiint \overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dS}$$





2. Théorème de Gauss:



a. Cas particuliers

b) Théorème de Gauss:

LE FLUX SORTANT DU CHAMP ELECTRIQUE D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGES A TRAVERS UNE SURFACE FERMEE EST EGAL A LA SOMME DES CHARGES INTERIEURES DIVISEE PAR ε_0

$$\Phi = \oiint d\Phi = \oiint \overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dS}$$

$$= \frac{\sum q_{interieures}}{\varepsilon_0}$$

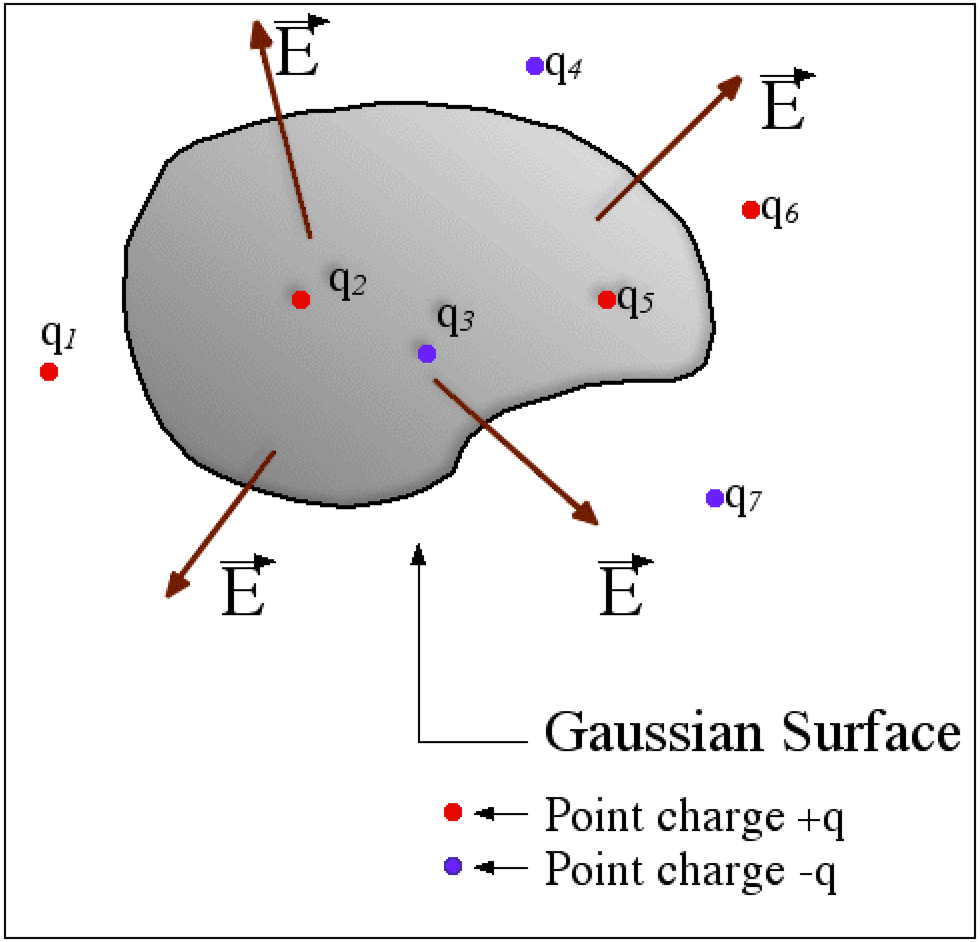
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho(\overrightarrow{r})d\tau$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\iint \sigma(\overrightarrow{r})ds$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int \lambda(\overrightarrow{r})dl$$

Attention : Dans la somme (distribution de charges ponctuelles) ou les integrales (distribution continue), on ne tient compte uniquement des charges contenues dans la surface de gauss

- Exemple général

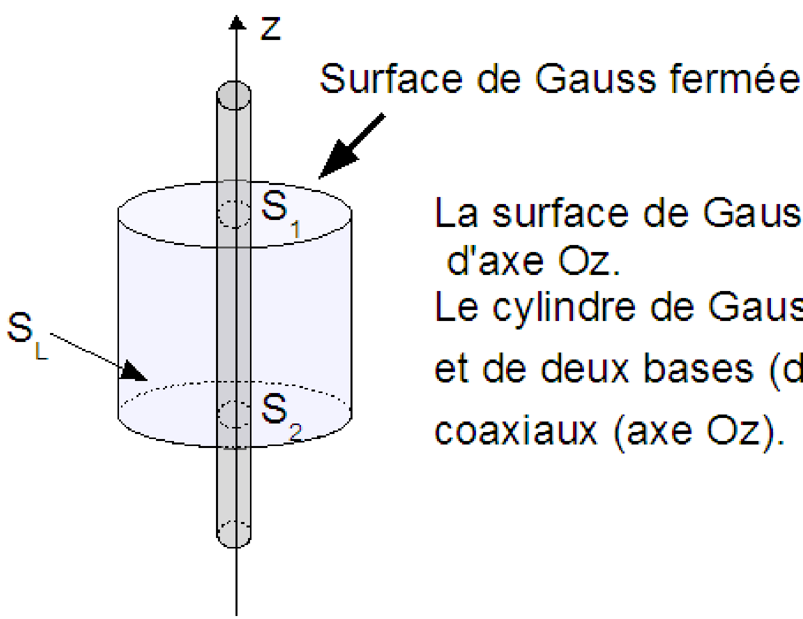


3) Application et exemples:

1) Symétries et invariances
2) Détermination de la surface de Gauss
3) Utilisation du théorème de Gauss

Exemple 1:

Fil rectiligne infini de rayon R   uniformément chargé en volume:



La surface de Gauss est un cylindre fermé de rayon r, de hauteur h et d'axe Oz.
Le cylindre de Gauss est constitué d'une surface latérale cylindrique S_L et de deux bases (disques) S_1 et S_2. Le fil et le cylindre de Gauss sont coaxiaux (axe Oz).

1. Symétries et invariances :
   $\overrightarrow{E} = E_r(r)\overrightarrow{u_r}$

2. Calcul du flux total Φ_T à travers le cylindre de Gauss de rayon r et de hauteur h:

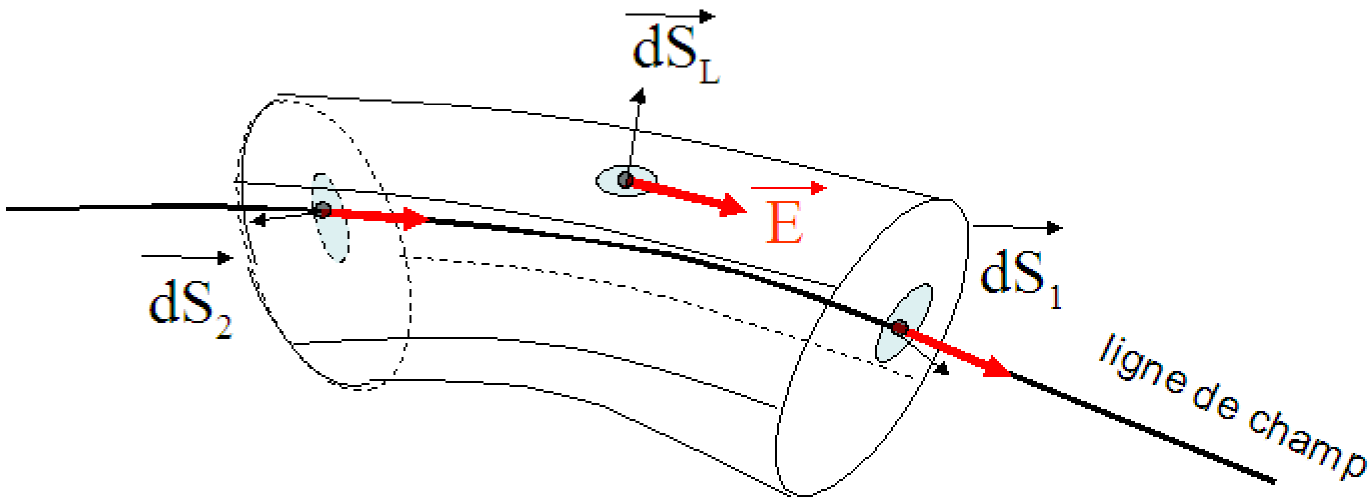
$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \iint_{S1} d\Phi = \iint_{S1} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS_1} = \iint E_r(r)\overrightarrow{u_r}(dS\overrightarrow{u_z}) = 0 \\
\Phi_2 &= \iint_{S2} d\Phi = \iint_{S2} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS_2} = \iint E_r(r)\overrightarrow{u_r}(-dS\overrightarrow{u_z}) = 0 \\
\Phi_L &= \iint_{SL} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS_L} = \int_0^{2\pi}\int_0^h E_r(r)\overrightarrow{u_r}(rd\theta dz\overrightarrow{u_r}) = 2\pi rhE_r(r) \\
\Phi_T &= \Phi_L + \Phi_1 + \Phi_2 = 2\pi rhE_r(r).
\end{aligned}$$

3. Théorème de Gauss :
   $\Phi_T = 2\pi rhE_r(r) = \iiint \rho/\varepsilon_0 d\tau$

   - $r < R$
     $\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho/\varepsilon_0 d\tau = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$
   - $r > R$
     $\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho/\varepsilon_0 d\tau = \frac{\rho\pi R^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$

4) Caractère conservatif du flux du champ E :

Surface fermée: tube de champ (S_L) + S_1 et S_2



$$\Phi_{sortant} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L = \sum q_{intérieures}/\varepsilon_0 = 0$$

$$\Phi_L = \iint_{S_L} E.dS_L = 0$$ (flux de E à travers la surface latérale du tube)

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} E.dS_1 = -\iint_{S_2} E.dS$$

En l'absence de charges, le flux du champ E est <u>conservatif</u>

Equations locales du champ E statique

I. Circulation de E :

$$\text{Stokes : } \oint \vec{E}\,\vec{dl} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}).\vec{dS}$$

$$\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0 \Rightarrow \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}).\vec{dS} = 0 \text{ quel que soit le contour choisi}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Equation locale de maxwell Faraday :

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}}$$

Pas vrai en régime variable!!!

II. Forme locale du théorème de Gauss :

Green-Ostrogradski :

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}.\vec{dS} = \iiint_V \vec{\nabla}.\vec{E}\,d\tau \qquad\qquad \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\vec{dS} = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})d\tau}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{E} - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0})d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E} - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0$$

en tout point de l'espace

Equation locale de maxwell Gauss : $\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$

Valable en régime variable

Ne s'applique pas aux autres formes de distributions de charges (ponctuelles, linéiques, surfaciques!!!!

III. Potentiel électrostatique **V(r)**:

1. <u>Equation de Poisson :</u>

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0$$

Laplacien

$$\boxed{\Delta V(\vec{r}) + \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0}$$

Equation de Poisson

2. <u>Equation de Laplace :</u>

$$\text{En l'absence de charges} : \rho(\vec{r}) = 0$$

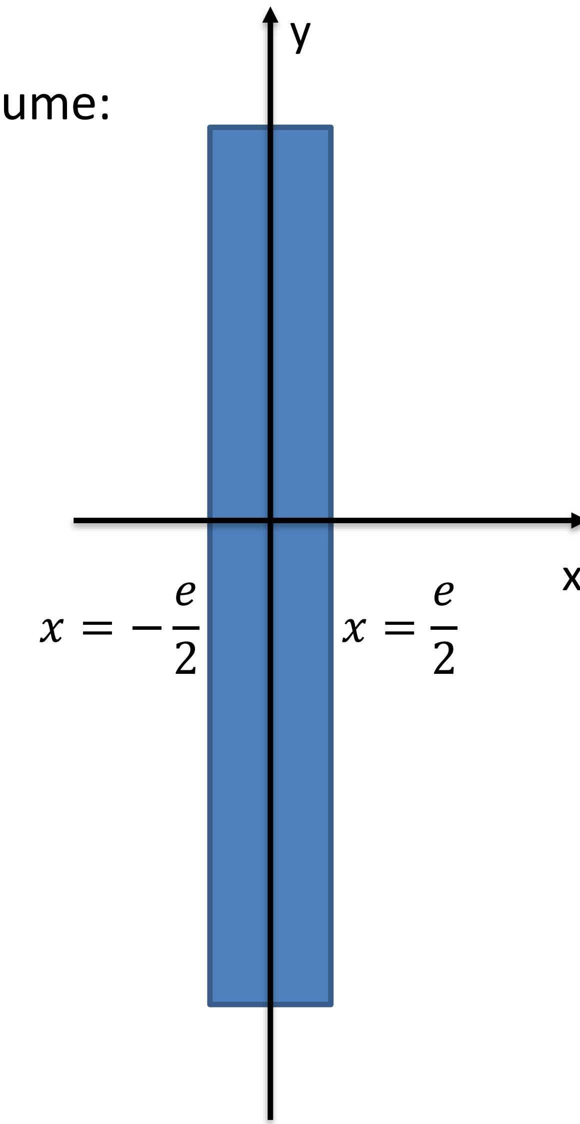
$$\boxed{\Delta V(\vec{r}) = 0}$$

Equation de Laplace

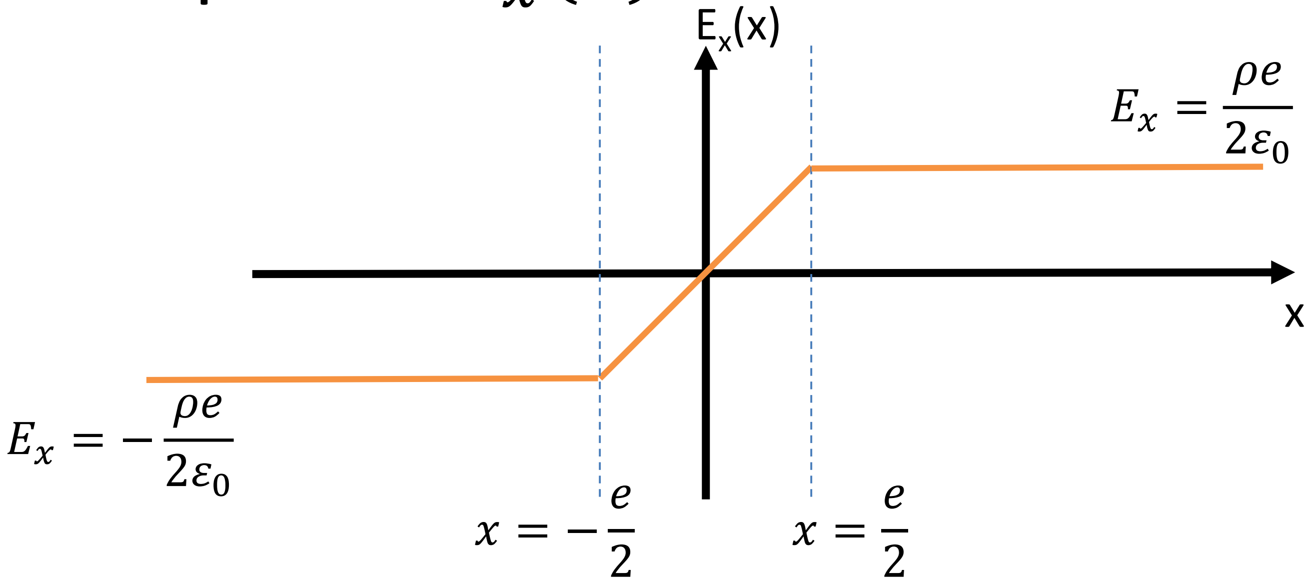
- Exemple :

- Plaque infinie (selon x et y) uniformément chargée en volume:
- 0<|x|<e/2 ρ(x)=ρ (dans la plaque)
- |x|>e/2   ρ(x)=0 (en dehors de la plaque)
  - Symétries et invariances : $\vec{E} = E_x(x)\,\vec{u}_x$
  - Calcul de $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_x(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}, |x| < \dfrac{e}{2} \\ \pm\dfrac{\rho e}{2\varepsilon_0}, x \geq \dfrac{e}{2} \end{cases}$$



- Graphe de $E_x(x)$



- Recommencer avec le Th de Gauss sous sa forme intégrale (surface de Gauss?)

- Etude du potentiel V(x) (à faire):
  - À partir du champ $\vec{E}$
  - A partir de l’équation de Poisson

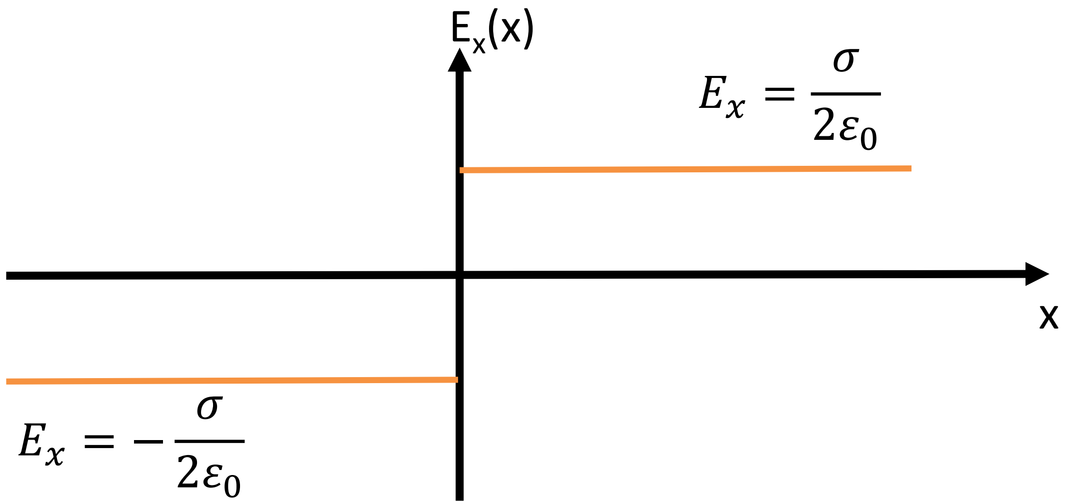
✓ **Plan portant une charge de surface σ uniforme :**

- **Charge volumique** :
La charge contenue dans le volume $\tau = e\,S$ (où S est une surface parallèle à la plaque) s′écrit :
$$Q = \rho\,\tau = \rho e S$$

- Si l'épaisseur e de la plaque tend vers 0 alors ρ → σ. La charge volumique ρ devient surfacique σ sur le plan xOy.
Charge surfacique : La charge Q de surface portée par un élément de surface S du plan xOy est $Q = \sigma S$
On a $Q = \rho\,\tau = \rho e S = \sigma S$. Par identification , on obtient $\sigma = \rho e$. (vérifier l'homogénéité).

- En remplaçant ρe par σ dans l'expression du champ $\vec{E}$ à l'extérieur de la plaque d'épaisseur e, on obtient :

- $$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \ ; si\ x > 0 \\ \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \ ; si\ x < 0 \end{cases}$$



- On remarque qu'au passage de la surface, la composante normale du champ $\vec{E}$ est **discontinue**. La discontinuité vaut $\sigma/_{\varepsilon_0}$. La discontinuité du champ magnétique s'écrit:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \Rightarrow \qquad \vec{E}_{x=0^+} - \vec{E}_{x=0^-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

La relation de passage est bien vérifiée.