

Matière : *Conception de Systèmes Optiques*

Titre du document : *Mémento*

Ces quelques pages constituent un formulaire sur les cours 4 à 9. Elles complètent les transparents présentés en cours

Cursus/option :	2A
Date de mise à jour :	janvier 2022
Année scolaire :	2023/2024
Auteurs :	Yvan Sortais

Table des matières

I	Développement polynômial de l'écart normal	5
1	Le développement de Seidel	5
2	Le développement de Zernike	6
2.1	Pourquoi une autre base de polynômes ?	6
2.2	Définition des polynômes de Zernike	7
2.3	Quelques propriétés des polynômes de Zernike	7
2.4	Deux corollaires importants	8
2.5	Lien avec le rapport de Strehl et notion de "meilleur foyer" . . .	8
II	Les aberrations chromatiques paraxiales	10
3	Notions de base	10
3.1	Le chromatisme axial	10
3.2	Le chromatisme latéral, ou "chromatisme de grandeur apparente"	11
3.3	Notions de chromatisme primaire et secondaire	11
4	Variation du chromatisme latéral avec la position de la pupille - Notion de pupille isochromatique	12
III	Les aberrations géométriques du 3^e ordre : étude générale	13
5	L'aberration sphérique	13
6	La coma	14
7	L'astigmatisme & la courbure de champ	14
8	La distorsion	16
9	Variation des aberrations avec la position de la pupille	17
9.1	Origine du phénomène	17
9.2	Principe du calcul des variations des aberrations avec la position de la pupille	18
IV	Les aberrations du 3^e ordre du dioptré et du miroir	21
10	Aberration sphérique	21
11	Coma	21

12 Courbures d'astigmatisme et de champ	21
13 Distorsion	22

Première partie

Développement polynômial de l'écart normal

1 Le développement de Seidel

Pour un système centré, c'est à dire présentant un axe de symétrie de révolution, l'écart normal d'un front d'onde réel Σ par rapport à la sphère S_p , centrée en l'image paraxiale B'_p et de rayon $R = \overline{P'B'_p}$, se développe en série entière de termes en y^2 , h^2 , et $h y \cos \varphi$. C'est le développement de Seidel :

$$\Delta(y, h, \varphi) = \sum_{(p,q,m) \in \mathbb{N}^3} a_{p,q,m} h^{2p+m} y^{2q+m} \cos(m\varphi) \quad (1)$$

On appelle monômes de Seidel chacun des termes de ce développement. Dans cette équation, y désigne la variable de **champ** (ici, la hauteur de l'objet), h la hauteur d'impact d'un rayon dans la pupille ($h \in [0, h_{max}]$), et φ l'angle d'azimuth dans la pupille ($\varphi \in [0, 2\pi]$, défini par rapport à l'axe Y dans la pupille); (h, φ) sont les variables d'**ouverture**.

Les termes indépendants de h (et donc aussi de φ , puisque $p = m = 0$) sont appelés **pistons**. Ils correspondent à un écart normal, par rapport à la sphère S_p , qui est constant sur toute la pupille. Pour un front d'onde Σ qui coupe l'axe optique en P' (centre de la pupille de sortie), les pistons sont nuls.

Le terme en h^2 ($p = 1, q = m = 0$) correspond à un **défaut de courbure** du front d'onde, indépendant du champ. Le front d'onde Σ , sphérique, a son centre B' décalé de B'_p d'une quantité $\varepsilon = \overline{P'B'_p}$ le long du rayon ($P'B'_p$). ε est le "défaut de mise au point" (defocus, en anglais). Le défaut de courbure associé à ce "defocus" se traduit par un écart normal :

$$\Delta = -\frac{1}{2}\varepsilon\alpha'^2 \simeq -\frac{1}{2}\varepsilon\frac{h^2}{R^2}. \quad (2)$$

Ici, α' désigne l'angle d'ouverture, i.e. l'angle que fait le rayon réel avec l'axe ($P'B'_p$) (on a $\alpha' \simeq -h/R$).

Le terme en $h y \cos \varphi$ ($p = q = 0, m = 1$) correspond à un **défaut de basculement** du front d'onde (tilt, en anglais), linéaire en y . Le front d'onde Σ , sphérique, est basculé d'un angle $\beta \simeq dy'/R$ par rapport à la sphère S_p , avec $dy' = k \cdot y'$.

k est une constante; y' désigne dans la suite de ce cours la hauteur de l'image paraxiale, égale à la hauteur de l'objet multipliée par le grandissement transverse paraxial $(g_y)_p = y'/y$ pour la conjugaison considérée. L'écart normal

associé au terme de "tilt" selon la direction y' s'écrit donc :

$$\Delta = k \cdot y' \alpha' \cos \varphi. \quad (3)$$

Les termes suivants du développement (1) sont les **aberrations de Seidel du 3^e ordre**, celles pour lesquelles $2p + 2q + 2m = 4$. En effet, d'après les relations de Nijboer, la tache de diffusion sera une fonction polynômiale de degré $2p + 2q + 2m - 1 = 3$. Nous étudierons ces termes en détail dans la suite. Ils portent les noms suivants :

- le terme en h^4 est l'**aberration sphérique** du 3^e ordre ; indépendant de y et φ , ce défaut est donc le même sur l'axe et hors d'axe, et a la symétrie de révolution autour de l'axe ($P'B'_p$).
- le terme en $h^3 y \cos \varphi$ est la **coma** du 3^e ordre.
- le terme en $h^2 y^2$ est la **courbure de champ** du 3^e ordre ; comme le "defocus", il varie en h^2 et a la symétrie de révolution, mais ce défaut de courbure croît avec le champ comme y^2 .
- le terme en $h^2 y^2 \cos 2\varphi$ est l'**astigmatisme** du 3^e ordre ; comme le "defocus", il varie en h^2 , mais la variation en $\cos 2\varphi$ confère à ce défaut une allure de selle de cheval ; comme la courbure de champ, ce défaut croît avec le champ comme y^2 .
- le terme en $h y^3 \cos \varphi$ est la **distorsion** du 3^e ordre ; formellement, ce défaut ressemble au défaut de basculement, mais ici $dy' \propto y'^3$; nous verrons que cette non-linéarité en y' est responsable de la *distorsion* de l'image.

De manière générale, les termes du développement (1) dont le degré vaut $2p + 2q + 2m$ correspondent aux aberrations de Seidel d'ordre $2p + 2q + 2m - 1$.

Note : Pour un système non centré, le développement (1) doit être complété par des termes en sinus :

$$\Delta(y, h, \varphi) = \sum_{(p,q,m) \in \mathbb{N}^3} h^{2p+m} y^{2q+m} (a_{p,q,m} \cos(m\varphi) + a'_{p,q,m} \sin(m\varphi)) \quad (4)$$

2 Le développement de Zernike

2.1 Pourquoi une autre base de polynômes ?

Considérons un système optique de pupille circulaire et de transmission uniforme à l'intérieur de la pupille. Notons $0 \leq u = h/h_{max} \leq 1$ la variable d'ouverture radiale, normalisée à 1 en bord de pupille. La hauteur de l'objet " y " étant fixée, le front d'onde émergent se développe en somme de termes du type $u^{2p+m} \cos(m\varphi)$ et $u^{2p+m} \sin(m\varphi)$ (cf. eq. (4)). Ces polynômes constituent une base **non orthogonale** de l'espace des polynômes, ce qui ne permet pas de développer le front d'onde selon un système unique de coordonnées qui soit indépendantes de l'ordre des aberrations auquel on souhaite pousser les calculs. Précisons que le produit scalaire utilisé pour parler d'orthogonalité est défini

sur la pupille disque de la façon suivante :

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(u, \varphi) g^*(u, \varphi) u \, du \, d\varphi \quad (5)$$

où f et g sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de carré intégrable.

2.2 Définition des polynômes de Zernike

Pour résoudre ce problème, Nijboer et F. Zernike (1934) ont introduit une base légèrement différente, **orthogonale sur la pupille disque**, et définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} Z_n^m(u, \varphi) &= \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_m^0}} R_n^m(u) \cos(m\varphi), \quad m \geq 0 \\ Z_n^{-m}(u, \varphi) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(u) \sin(m\varphi), \quad m > 0 \end{cases} \quad (6)$$

avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n - m \geq 0$, et $n - m$ pair. Dans ces expressions $R_n^m(u)$ est un polynôme de degré n contenant les termes $u^n, u^{n-2}, \dots, u^m$, et défini par :

$$R_n^m(u) = \sum_s^{(n-m)/2} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} u^{n-2s}. \quad (7)$$

Le tableau 1 donne les polynômes de Zernike jusqu'au 7^e ordre. Le développement de l'écart normal sur les polynômes de Zernike s'écrit donc :

$$\Delta(u, \varphi) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} c_{nm} Z_n^m(u, \varphi). \quad (8)$$

2.3 Quelques propriétés des polynômes de Zernike

- $\forall n \in \mathbb{N}, R_n^n(u) = u^n$,
- $\forall u \in [0, 1], \forall \varphi \in [0, 2\pi], Z_0^0(u, \varphi) = 1$,
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, R_n^m(1) = 1$ et $\forall u \in [0, 1], |R_n^m(u)| \leq 1$,
- Relation d'orthogonalité :

$$(Z_n^m, Z_{n'}^{m'}) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(u, \varphi) Z_{n'}^{m'}(u, \varphi) u \, du \, d\varphi = \delta_n^{n'} \delta_m^{m'}. \quad (9)$$

La relation (9) exprime en particulier que $\|Z_n^m\|^2 = 1$ pour tout couple (n, m) . Avec la définition du produit scalaire donnée précédemment, la base des polynômes de Zernike est donc non seulement orthogonale, mais également **orthonormée**.

2.4 Deux corollaires importants

La relation (9) a deux corollaires importants. L'orthogonalité des polynômes de Zernike implique en particulier que Z_0^0 est orthogonal à tous les autres polynômes Z_n^m , ce qui se traduit par le fait que les polynômes de Zernike ont tous une valeur moyenne nulle sur la pupille, à l'exception de Z_0^0 :

$$\forall (n, m) \neq (0, 0), \quad \overline{Z_n^m} = 0. \quad (10)$$

Autre corollaire très important de la relation (9) :

$$\sigma_\Delta^2 = \overline{\Delta^2} - \overline{\Delta}^2 = \sum_{(n,m) \neq (0,0)} c_{nm}^2. \quad (11)$$

La variance de l'écart normal est directement la somme quadratique des contributions des différentes aberrations au sens des polynômes de Zernike. Pour la minimiser, il suffit donc de minimiser chacune des contributions, et si possible les annuler, **indépendamment les unes des autres**.

2.5 Lien avec le rapport de Strehl et notion de "meilleur foyer"

Pour des aberrations suffisamment faibles le rapport de Strehl en un point B' quelconque de l'espace image est directement relié à la variance de l'écart normal Δ , ce dernier étant mesuré par rapport à la sphère de référence S centrée en B' :

$$R_S(B') = \frac{I(B')}{I_{max,ideal}} \simeq \exp \left(-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sigma_\Delta^2 \right). \quad (12)$$

Ici, $I(B')$ est l'éclairement¹ au point B' , et $I_{max,ideal}$ est l'éclairement pic de la RPI que l'on obtiendrait si le système était dénué d'aberrations².

Par conséquent, l'expression (11) permet de voir que la dégradation de l'éclairement en un point B' d'observation résulte directement de la somme (quadratique) des contributions des différentes aberrations (de Zernike) :

$$R_S(B') = \frac{I(B')}{I_{max,ideal}} \simeq \exp \left(-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sum_{(n,m) \neq (0,0)} c_{nm}^2 \right). \quad (13)$$

Par définition, on appelle "meilleur foyer" et on note B'^* le point de l'espace pour lequel l'éclairement est maximal³. C'est donc le centre de la sphère de référence S^* qui minimise σ_Δ^2 . On le trouve en décalant le point d'observation le

1. obtenu en calculant la Réponse Percussionnelle Incohérente en B' .

2. Pour une pupille disque, c'est l'éclairement pic de la tache d'Airy.

3. L'expression "meilleur foyer" est une expression consacrée, mais en fait on devrait plutôt parler de "meilleure image", car cette notion est générale pour toute conjugaison, elle n'est pas restreinte au cas de la conjugaison infini-foyer.

n	m	$Z_n^m(u, \varphi)$	Dénomination
0	0	1	Piston
1	1	$2 u \cos \varphi$	Tilt à 0°
1	-1	$2 u \sin \varphi$	Tilt à 90°
2	0	$\sqrt{3} (2u^2 - 1)$	Defocus (+ courbure de champ)
2	2	$\sqrt{6} u^2 \cos 2\varphi$	Astigmatisme à 0°
2	-2	$\sqrt{6} u^2 \sin 2\varphi$	Astigmatisme à 45°
3	1	$\sqrt{8} (3u^3 - 2u) \cos \varphi$	Coma à 0°
3	-1	$\sqrt{8} (3u^3 - 2u) \sin \varphi$	Coma à 45°
4	0	$\sqrt{5} (6u^4 - 6u^2 + 1)$	Aberration sphérique
3	3	$\sqrt{8} u^3 \cos 3\varphi$	Trèfle à 3 feuilles à 0°
3	-3	$\sqrt{8} u^3 \sin 3\varphi$	Trèfle à 3 feuilles à 45°
4	2	$\sqrt{10} (4u^4 - 3u^2) \cos 2\varphi$	Astigmatisme à 0°
4	-2	$\sqrt{10} (4u^4 - 3u^2) \sin 2\varphi$	Astigmatisme à 45°
5	1	$\sqrt{12} (10u^5 - 12u^3 + 3u) \cos \varphi$	Coma à 0°
5	-1	$\sqrt{12} (10u^5 - 12u^3 + 3u) \sin \varphi$	Coma à 45°
6	0	$\sqrt{7} (20u^6 - 30u^4 + 12u^2 - 1)$	Aberration sphérique
4	4	$\sqrt{10} u^4 \cos 4\varphi$	Trèfle à 4 feuilles à 0°
4	-4	$\sqrt{10} u^4 \sin 4\varphi$	Trèfle à 4 feuilles à 45°
5	3	$\sqrt{12} (5u^5 - 4u^3) \cos 3\varphi$	Trèfle à 3 feuilles à 0°
5	-3	$\sqrt{12} (5u^5 - 4u^3) \sin 3\varphi$	Trèfle à 3 feuilles à 45°
6	2	$\sqrt{14} (15u^6 - 20u^4 + 6u^2) \cos 2\varphi$	Astigmatisme à 0°
6	-2	$\sqrt{14} (15u^6 - 20u^4 + 6u^2) \sin 2\varphi$	Astigmatisme à 45°
7	1	$\sqrt{16} (35u^7 - 60u^5 + 30u^3 - 4u) \cos \varphi$	Coma à 0°
7	-1	$\sqrt{16} (35u^7 - 60u^5 + 30u^3 - 4u) \sin \varphi$	Coma à 45°
8	0	$\sqrt{9} (70u^8 - 140u^6 + 90u^4 - 20u^2 + 1)$	Aberration sphérique

TABLE 1 – Polynômes de Zernike jusqu'au 7^e ordre des aberrations.

long de l'axe ("defocus") et transversalement ("tilts") de quantités appropriées, c'est à dire qui conduisent à annuler les contributions de Z_2^0 ("defocus") ainsi que de Z_1^1 et Z_1^{-1} ("tilts") dans le développement de l'écart normal. Au meilleur foyer, le rapport de Strehl s'écrit donc (dans la limite des faibles aberrations) :

$$R_S(B'^*) \simeq \exp \left(-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sum_{(n,m) \notin \{(0,0), (2,0), (1,1), (1,-1)\}} c_{nm}^2 \right). \quad (14)$$

Deuxième partie

Les aberrations chromatiques paraxiales

Les aberrations chromatiques apparaissent lorsque les rayons lumineux associés à des longueurs d'onde différentes se propagent différemment à travers le système optique, conduisant dans un même plan de mise au point à des taches de diffusion différentes.

Cette définition appelle deux remarques. D'une part il s'agit là d'un phénomène purement géométrique (i.e. décrit par la propagation de "rayons lumineux"). D'un point de vue ondulatoire, pour un système parfait, on sait que les dimensions de la tache de diffraction dépendent linéairement de la longueur d'onde ($\phi_{\text{Airy}} = 2.44\lambda/(2n' \sin \alpha')$ pour un pupille disque circulaire). Cette variation avec la longueur d'onde n'est pas une aberration chromatique à proprement parler, mais peut être gênante si la résolution du capteur permet de la résoudre. D'autre part, les aberrations chromatiques apparaissent non seulement à tous les ordres des aberrations⁴ mais également dans le domaine paraxial. Cette partie se restreint à l'étude des aberrations chromatiques paraxiales. On supposera donc le système peu ouvert et dénué d'autres aberrations.

3 Notions de base

3.1 Le chromatisme axial

Le chromatisme axial (ou "longitudinal") désigne le fait que l'image d'un point se forme dans des plans paraxiaux différents selon la longueur d'onde. Mathématiquement, il s'agit de la distance algébrique dz'_λ entre le plan paraxial (Π_R) associé à une longueur d'onde de référence et le plan paraxial (Π_λ) associé à la longueur d'onde λ . Pour fixer les idées, on prendra ici pour longueur d'onde de référence la raie C de l'Hydrogène à $\lambda_R = 656.27$ nm (couleur : rouge), comme il est d'usage quand on fait de l'imagerie dans le domaine visible, par exemple en astronomie.

En pratique, un système présentant du chromatisme axial à la longueur d'onde λ conduit à l'observation d'un point rouge (en fait, une tache de diffraction) dans le plan paraxial de référence (rouge), entouré d'une tache de diffusion circulaire et d'éclairement homogène à la longueur d'onde λ . Le rayon de la tache de diffusion varie proportionnellement avec l'angle α' d'ouverture du système.

4. L'aberration sphérique, par exemple, peut conduire à des taches de diffusion différentes selon la longueur d'onde. On appelle ce phénomène le sphéro-chromatisme.

3.2 Le chromatisme latéral, ou "chromatisme de grandeur apparente"

Le chromatisme latéral désigne le fait que dans le plan paraxial (Π_R) l'image d'un point B hors d'axe à la longueur d'onde λ est décalée "latéralement" par rapport à l'image paraxiale B'_R de ce point à la longueur d'onde de référence. Ce décalage latéral est noté $dy'_{L,\lambda}$. Il est indépendant de l'angle α' d'ouverture du système.

Le chromatisme latéral est un phénomène indépendant du chromatisme axial ; il peut exister avec ou sans lui. En l'absence de chromatisme axial, la chromatisme latéral conduit à des images nettes dans un même plan, mais de "grandeurs" différentes. Lorsqu'il coexiste avec le chromatisme axial, le chromatisme latéral conduit à des images de "grandeurs" différentes et de nettetés différentes dans un même plan de mise au point. Ceci explique l'appellation de "*chromatisme de grandeur apparente*" que l'on donne parfois au chromatisme de latéral.

3.3 Notions de chromatisme primaire et secondaire

Le chromatisme primaire désigne la variation linéaire du chromatisme, axial ou latéral, sur un intervalle spectral. Pour un verre donné son amplitude est caractérisée par la dispersion relative du verre sur cet intervalle, $\Delta n/(\bar{n} - 1)$, ou par son inverse, la constringence ν (ou nombre d'Abbe) :

$$\nu = \frac{\bar{n} - 1}{\Delta n}. \quad (15)$$

Ici, $\bar{n}$ désigne l'indice pour une longueur d'onde moyenne proche du milieu de l'intervalle spectral de travail, et Δn désigne la différence des indices pour les longueurs d'onde extrêmes de l'intervalle spectral ($\Delta n = n(\lambda_{\min}) - n(\lambda_{\max})$). Dans le domaine visible, on prend souvent $\lambda_{\min} = 486.13$ nm (raie F de l'Hydrogène, bleue), $\lambda_{\max} = 656.27$ nm (raie C de l'Hydrogène, rouge) et $\bar{\lambda} = 589.29$ nm (raie D du Sodium, jaune). Les verres "Crown" sont des verres de forte constringence (ils dispersent peu) ; ex : le BK7 de Schott ($\nu \simeq 64$). Au contraire les verres "Flint" sont des verres de faible constringence (ils dispersent beaucoup) ; ex : le SF5 de Schott ($\nu \simeq 32$).

Le chromatisme secondaire désigne la déviation quadratique du chromatisme par rapport à sa variation linéaire. Il est lié à la variation quadratique de la dispersion. Par exemple, dans un objectif pour lequel on a réussi à replier le chromatisme axial 1 fois de sorte à confondre les deux foyers des raies F et C du spectre visible, le chromatisme secondaire axial est le chromatisme résiduel qui sépare les foyers des raies D (jaune) et F (ou C).

Lorsqu'on a réussi à replier le chromatisme axial 2 fois de sorte à confondre les foyers associés à trois longueurs d'onde, on a un système *apochromatique*.

4 Variation du chromatisme latéral avec la position de la pupille - Notion de pupille isochromatique

Lorsqu'un système optique présente du chromatisme axial primaire, il existe une (et une seule) position de pupille, P'_0 , pour laquelle le chromatisme latéral est nul. C'est la pupille *isochromatique*. Par exemple, dans le spectre visible, elle est telle que P'_0 et les points images B'_R (rouge, raie C de l'Hydrogène) et B'_B (bleu, raie F de l'Hydrogène) sont alignés.

On en déduit que lorsqu'on déplace la pupille d'un système optique d'une position $\{1\}$ à une position $\{2\}$, le chromatisme latéral varie selon la formule suivante :

$$k_2 = k_1 + dz' \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) \quad (16)$$

où $k_i = dy'_{L,i}/y'$ caractérise le chromatisme latéral primaire pour la position $\{i\}$ de la pupille, $dz' = \overline{A'_R A'_B}$ est le chromatisme axial primaire (ici pris dans le spectre visible), et $p'_i = \overline{A'_R P'_i}$ est la distance algébrique de la pupille de sortie (dans la position $\{i\}$) par rapport à l'image paraxiale de référence A'_R .

On verra dans le chapitre suivant des formules analogues pour les aberrations *géométriques*.

Troisième partie

Les aberrations géométriques du 3^e ordre : étude générale

Cette partie résume les propriétés principales des aberrations du 3^e ordre, décrites selon une **approche purement géométrique**. On rappelle que cette approche n'est valide que pour des aberrations importantes, c'est à dire conduisant à une tache de diffusion notablement plus étalée que la tache de diffraction du système idéal de même ouverture, i.e. dénué d'aberrations.

5 L'aberration sphérique

L'écart normal d'aberrations sphérique du 3^e ordre, mesuré par rapport à la sphère de référence S_p centrée sur l'image paraxiale, s'écrit :

$$\Delta = -\frac{1}{4} a \alpha'^4. \quad (17)$$

Il est indépendant de la variable de champ "y" ; l'aberration sphérique est donc invariante dans le champ. Le paramètre "a" caractérise l'amplitude de l'aberration sphérique du 3^e ordre. On rappelle que α' désigne l'angle d'ouverture, i.e. l'angle que fait le rayon réel avec l'axe ($P'B'_p$). L'aberration sphérique est donc un défaut qui a la symétrie de révolution autour de l'axe ($P'B'_p$).

La tache de diffusion associée, dans le plan paraxial, a pour équations paramétrées :

$$\begin{cases} dy' &= -a \alpha'^3 \cos \varphi \\ dx' &= -a \alpha'^3 \sin \varphi \end{cases} \quad (18)$$

Les rayons faisant un angle α' avec l'axe ($P'B'_p$) interceptent cet axe en un point $B' \neq B'_p$. La quantité $l(\alpha') = \overline{B'_p B'}$ permet également d'apprécier l'amplitude de l'aberration sphérique. Elle est parfois appelée "aberration sphérique longitudinale" :

$$l(\alpha') = a \alpha'^2. \quad (19)$$

On appelle **caustique** l'enveloppe des rayons lumineux, paramétrés par les variables d'ouverture (α', φ). Elle se manifeste en pratique sous forme de zones de concentration de la lumière, par exemple des anneaux ou un point lumineux central très brillants dans le cas de l'aberration sphérique. On démontre de manière générale qu'un caustique est constituée de deux surfaces, encore appelées nappe tangentielle et nappe sagittale. Pour l'aberration sphérique du 3^e ordre, la nappe tangentielle a une forme de "filet à papillon", dont la pointe est B'_p ; la nappe sagittale est dégénérée en un segment situé sur l'axe ($P'B'_p$), et qui a pour extrémités B'_p et B'_m . B'_m est le "foyer marginal" (ou "image marginale"), point de convergence des rayons s'appuyant sur le bord de la pupille.

Le plan de moindre diffusion est le plan dans lequel la tache de diffusion a une diamètre minimal. Il est situé aux $3/4$ du segment $[B'_p B'_m]$ en partant de B'_p . Il intercepte l'axe $(P' B'_p)$ au "**foyer de moindre diffusion**".

Le **meilleur foyer** (centre de la sphère de référence qui minimise σ_Δ) est situé au milieu du segment $[B'_p B'_m]$. A la limite des faibles aberrations, c'est là que l'éclairement est maximal.

6 La coma

L'écart normal de coma du 3^e ordre, mesuré par rapport à la sphère de référence S_p centrée sur l'image paraxiale, s'écrit :

$$\Delta = b y' \alpha'^3 \cos \varphi. \quad (20)$$

Le paramètre "b" caractérise l'amplitude de la coma du 3^e ordre.

La tache de diffusion associée, dans le plan paraxial, a pour équations paramétrées :

$$\begin{cases} dy' &= b y' \alpha'^2 (2 + \cos 2\varphi) \\ dx' &= b y' \alpha'^2 \sin 2\varphi \end{cases} \quad (21)$$

Pour α' fixé, ce sont les équations paramétrées d'un cercle, de rayon $\rho = b y' \alpha'^2$, décentré de la quantité 2ρ par rapport à l'image paraxiale B'_p dans la direction définie par $(A'_p B'_p)$. Ce cercle est décrit 2 fois lorsque φ décrit $[0, 2\pi]$. Lorsque α' croît de 0 à α'_{max} , ρ croît de 0 à ρ_{max} (rayon du cercle de coma marginal). La tache de diffusion ressemble alors à une aigrette de coma, dont la pointe est en B'_p , d'angle au sommet égal à 60° , et orientée radialement par rapport à l'axe optique. L'aigrette est dite *externe* lorsque la tache de diffusion est orientée vers l'extérieur, par rapport à l'axe optique ($b > 0$, $dy'/y' > 0$) ou *interne* lorsqu'au contraire elle est orientée vers l'axe optique ($b < 0$, $dy'/y' < 0$).

Le **meilleur foyer** (centre de la sphère de référence qui minimise σ_Δ) est situé dans le plan paraxial, à l'intérieur de l'aigrette et sur la droite $(A'_p B'_p)$. Il est situé à la distance $2\rho/3$ de l'image paraxiale B'_p . A la limite des faibles aberrations, c'est là que l'éclairement est maximal.

7 L'astigmatisme & la courbure de champ

L'**astigmatisme** du 3^e ordre est l'aberration pour laquelle l'écart normal Δ , mesuré par rapport à la sphère de référence S_p centrée sur l'image paraxiale, varie en $y'^2 \alpha'^2 \cos 2\varphi$. La variation en $\cos 2\varphi$ confère à la déformation du front d'onde sa symétrie d'ordre 2, c'est à dire à la fois par rapport au plan tangentiel ($\varphi = 0$) et par rapport au plan sagittal ($\varphi = \pi/2$), et son allure de selle de cheval.

La **courbure de champ** du 3^e ordre est l'aberration pour laquelle l'écart normal Δ varie en $y'^2 \alpha'^2$. La déformation du front est cette fois à symétrie de révolution autour de l'axe $(P'B'_p)$.

Dans les deux cas, la variation de Δ en α'^2 conduit à une déformation présentant une courbure locale⁵, en P' , non nulle dans au moins un plan méridien⁶. L'objet étant pris dans le plan tangentiel, on montre que la courbure locale du front d'onde, dans un plan méridien d'angle φ , s'écrit :

$$C_\varphi = C_Y \cos^2 \varphi + C_X \sin^2 \varphi, \quad (22)$$

où C_Y et C_X sont respectivement les courbures locales du front d'onde dans les plans tangentiel et sagittal. On note que C_φ atteint donc ses valeurs extrémales dans deux plans perpendiculaires, qui sont précisément le plan tangentiel et le plan sagittal. Dans le cas de l'astigmatisme pur, $C_Y = -C_X \neq 0$: le point de focalisation B'_φ des rayons se propageant dans un plan méridien donné dépend de φ et décrit le segment $[T'S']$, où T' est le foyer tangentiel et S' le foyer sagittal.

Dans le cas de la courbure de champ pure, $C_Y = C_X \neq 0$. Le point de focalisation B' est le même pour tous les plans méridiens, mais est décalé par rapport à B'_p sur l'axe $(P'B'_p)$. Pour cette raison on dit parfois que la courbure de champ est un défaut de "defocus" (sous-entendu, à "y" fixé).

Dans les deux cas, la variation de Δ en y'^2 conduit les points de focalisation B'_φ ou B' à se déplacer sur des paraboles lorsque y varie. On note respectivement C'_T et C'_S les courbures locales, en A'_p , des paraboles tangentielle et sagittale. Pour un système optique présentant de l'astigmatisme pur, $C'_S = -C'_T \neq 0$. Pour un système optique présentant de la courbure de champ pure, $C'_S = C'_T \neq 0$.

Dans le cas général, on note

$$C' = (C'_S + C'_T)/2$$

la courbure moyenne, dite "courbure de champ", et

$$A' = (C'_S - C'_T)/2,$$

dite "courbure d'astigmatisme".

Note : ne pas confondre C_Y , C_X avec C'_S , C'_T .

En utilisant les quantités introduites ci-dessus, on montre de manière générale que l'écart normal Δ , mesuré par rapport à la sphère de référence S_p centrée sur l'image paraxiale, s'écrit :

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C'_T \cos^2 \varphi + C'_S \sin^2 \varphi), \quad (23)$$

5. dérivée seconde de la déformation par rapport à α' .

6. On appelle plan méridien un plan contenant l'axe optique. Il est caractérisé par son angle d'azimuth φ .

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C' - A' \cos 2\varphi). \quad (24)$$

La tache de diffusion associée à l'**astigmatisme pur** ($C'_S = -C'_T = A' \neq 0$), dans le plan paraxial, a pour équations paramétrées :

$$\begin{cases} dy' &= A' \frac{y'^2}{2} \alpha' \cos \varphi \\ dx' &= -A' \frac{y'^2}{2} \alpha' \sin \varphi \end{cases} \quad (25)$$

Pour α' fixé, ce sont les équations paramétrées d'un cercle, de diamètre $A' y'^2 \alpha'$, centré sur l'image paraxiale B'_p . C'est le cercle de moindre diffusion. Son diamètre croît linéairement avec α' . Le meilleur foyer (au sens de la minimisation de σ_Δ) est confondu avec B'_p .

Pour un plan de mise au point situé en $s' = C'_S y'^2/2$, la tache de diffusion est une ligne focale parallèle à y' (ligne focale sagittale), de longueur $2A' y'^2 \alpha'$. Au contraire, pour un plan de mise au point situé en $t' = C'_T y'^2/2$, la tache de diffusion est une ligne focale perpendiculaire à y' (ligne focale tangentielle), également de longueur $2A' y'^2 \alpha'$. Dans tout plan de mise point autre que les plans paraxial, tangentiel et sagittal, la tache de diffusion est elliptique.

La tache de diffusion associée à la **courbure de champ pure** ($C'_S = C'_T = C' \neq 0$), dans le plan paraxial, a pour équations paramétrées :

$$\begin{cases} dy' &= -C' \frac{y'^2}{2} \alpha' \cos \varphi \\ dx' &= -C' \frac{y'^2}{2} \alpha' \sin \varphi \end{cases} \quad (26)$$

Pour α' fixé, ce sont là encore les équations paramétrées d'un cercle, de diamètre $C' y'^2 \alpha'$, centré sur l'image paraxiale B'_p . Son diamètre croît linéairement avec α' . Le meilleur foyer (au sens de la minimisation de σ_Δ) est situé sur la surface focale de courbure C' . L'image en ce point est parfaite, c'est une tache d'Airy (dans le cas d'une pupille disque). Le meilleur foyer est donc décalé longitudinalement, par rapport à B'_p , de la quantité $s' = t' = C' y'^2/2$. Contrairement à l'astigmatisme, dans tout plan de mise au point autre que celui du meilleur foyer la tache de diffusion est à symétrie de révolution.

8 La distorsion

L'écart normal de distorsion du 3^e ordre, mesuré par rapport à la sphère de référence S_p centrée sur l'image paraxiale, s'écrit :

$$\Delta = D y'^3 \alpha' \cos \varphi. \quad (27)$$

Le paramètre "D" caractérise l'amplitude de la distorsion du 3^e ordre.

La tache de diffusion associée, dans le plan paraxial, a pour équations paramétrées :

$$\begin{cases} dy' &= D y'^3 \cos \varphi \\ dx' &= 0 \end{cases} \quad (28)$$

D'un point de vue géométrique, un système optique présentant uniquement de la distorsion du 3^e ordre donne donc, d'un point lumineux hors d'axe, un point lumineux image décalé dans le plan paraxial, le décalage étant radial, c'est à dire orienté selon $(A'_p B'_p)$, et variant comme y'^3 . L'image d'une scène hors d'axe à travers un système présentant de la distorsion n'est donc pas homothétique de la scène objet. Elle est nette, mais *distordue*. D'un point de vue ondulatoire, la réponse percussionnelle est celle d'un système dénué d'aberrations (une tache d'Airy par exemple) mais décalée de dy' par rapport à B'_p . Ce décalage ne dépend pas de l'ouverture numérique du système. L'étude de la distorsion pure se fait donc en fermant la pupille au maximum, et en regardant comment évolue la déviation angulaire du rayon moyen, i.e. passant par le centre de la pupille.

Lorsque $D > 0$, l'image d'une grille carrée est une grille distordue en forme de "coussinet" (dont les diagonales sont "pointues"). Lorsque $D < 0$, l'image de la grille est distordue en forme de "barillet".

9 Variation des aberrations avec la position de la pupille

La forme et les dimensions de la tache de diffusion d'un système optique sont déterminées par la configuration des rayons émergeant du système après traversée de ses différents dioptrés et diaphragmes, et éventuellement des réflexions sur des miroirs. Tout changement dans les paramètres du système est susceptible de modifier la configuration des rayons émergents, et donc la tache de diffusion. C'est bien sûr le cas des rayons de courbure des surfaces, des indices de réfraction des verres, des épaisseurs d'air entre les éléments optiques, des épaisseurs des éléments optiques eux-mêmes, de la position de l'objet par rapport au système optique ... Mais c'est également le cas lorsqu'on déplace le diaphragme d'ouverture (la "pupille") le long de l'axe.

9.1 Origine du phénomène

Pour un point objet donné, la pupille opère un filtrage des rayons en ne laissant passer que certains d'entre eux à travers le système⁷. Varier la position de la pupille d'une position {1} à une position {2} modifie la distribution des rayons qui passent à travers le filtre : certains rayons qui étaient bloqués dans la

7. On suppose ici que le point objet est dans le champ de pleine lumière. Par conséquent le seul diaphragme rencontré par les rayons lumineux est le diaphragme d'ouverture. On ne s'intéresse pas à ce qui se passe pour des rayons issus d'un point objet situé dans la zone de champ intermédiaire située entre le champ de pleine lumière et le champ total.

position {1} deviennent passants dans la position {2}, et inversement d'autres qui passaient ne passent plus, ce qui modifie la tache de diffusion⁸.

Considérez par exemple un miroir sphérique et un point objet quelconque B . Lorsque la pupille est dans le plan du centre de courbure ($P'_1 = C$), la portion éclairée du miroir est à symétrie de révolution autour de la droite ($P'_1 B'_p$)⁹. Par conséquent, la tache de diffusion est également à symétrie de révolution. En termes d'aberrations, ce miroir ne présente pour cette position de pupille que des aberrations "à symétrie de révolution" : "defocus", aberration sphérique et courbure de champ (qui est un "defocus", au sens large). Déplacez maintenant la pupille, et placez-la au sommet du miroir ($P'_2 = S$). La portion éclairée du miroir n'est plus à symétrie de révolution autour de la droite ($P'_2 B'_p$) et il apparaît de la coma, de l'astigmatisme ...etc, qui brisent la symétrie de révolution de la tache de diffusion.

9.2 Principe du calcul des variations des aberrations avec la position de la pupille

Mathématiquement, la variation des aberrations avec la position de la pupille se comprend en considérant le développement de l'écart normal Δ le long d'un rayon donné, en fonction des coordonnées du point d'intersection I' de ce rayon avec la pupille. Les coordonnées de I' par rapport au centre de l'image A'_p sont :

$$I' = (p', p'\alpha' \cos \varphi, p'\alpha' \sin \varphi) \quad (29)$$

où $p' = \overline{A'_p P'}$.

Un déplacement de la pupille (de sortie) de P'_1 à P'_2 ne modifie pas le parcours du rayon considéré, et donc Δ n'est pas modifié, mais les coordonnées de l'intersection I'_2 du rayon avec la nouvelle pupille de sortie ont des coordonnées différentes de celles de I'_1 (cf. figure 1). L'expression de Δ en fonction des nouvelles coordonnées d'ouverture α'_2 et φ_2 , $\Delta = f_2(\alpha'_2, \varphi_2)$, sera différente de celle que l'on avait en fonction de α'_1 et φ_1 , $\Delta = f_1(\alpha'_1, \varphi_1)$.

Par exemple, au 3^e ordre des aberrations, l'écart normal s'exprime à l'aide des coefficients classiques a, b, C, A, D introduits dans les sections précédentes, et qui caractérisent l'amplitude des aberrations. Pour la position {1} de la pupille ces coefficients sont a_1, b_1, C_1, A_1, D_1 et Δ s'exprime de la façon suivante en fonction de α'_1 et φ_1 :

$$\Delta = -\frac{1}{4}a_1\alpha_1'^4 + b_1\alpha_1'^3 y_1' \cos \varphi_1 - \frac{\alpha_1'^2 y_1'^2}{4}(C_1 - A_1 \cos 2\varphi_1) + D_1\alpha_1' y_1'^3 \cos \varphi_1. \quad (30)$$

8. **Note importante** : il faut bien voir que le déplacement de la pupille ne modifie pas la trajectoire des rayons, pas plus qu'elle ne modifie la position de l'image paraxiale. Pour un rayon donné, l'écart normal Δ n'est pas modifié lorsque la position de la pupille varie. Ce qui varie, c'est le poids affecté aux rayons qui contribuent à la tache de diffusion, 0 lorsqu'ils sont bloqués, et 1 lorsqu'ils sont passants.

9. Ceci résulte notamment du fait que pour un miroir *sphérique* toute droite passant par le centre de courbure est un axe de révolution du miroir

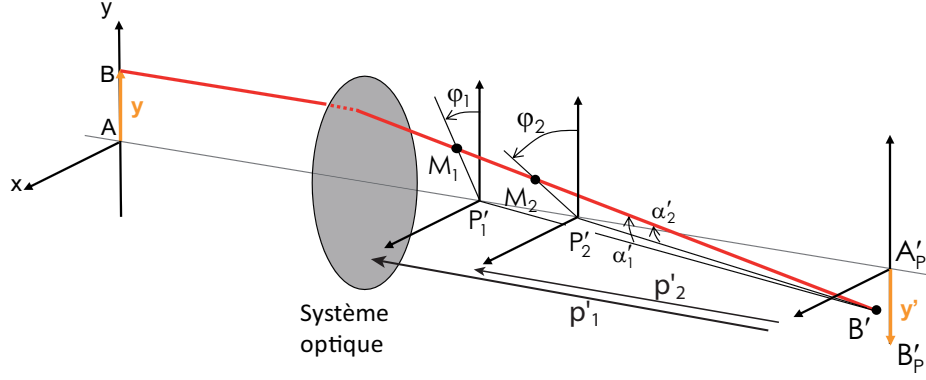


FIGURE 1 – Effet d'un déplacement de pupille d'une position {1} à une position {2} : le point d'intersection I'_1 du rayon dans la pupille devient I'_2 .

Pour la position {2} de la pupille les coefficients sont a_2, b_2, C_2, A_2, D_2 , a priori différents de a_1, b_1, C_1, A_1, D_1 , et Δ s'exprime en fonction de α'_2 et φ_2 sous la forme :

$$\Delta = -\frac{1}{4}a_2\alpha'^4_2 + b_2\alpha'^3_2y'_2 \cos \varphi_2 - \frac{\alpha'^2_2y'^2_2}{4}(C_2 - A_2 \cos 2\varphi_2) + D_2\alpha'_2y'^3_2 \cos \varphi_2. \quad (31)$$

Le passage des coordonnées (α'_1, φ_1) aux coordonnées (α'_2, φ_2) est possible analytiquement, et permet de transformer l'expression (30) en une expression de Δ fonction de (α'_2, φ_2) puis, par identification des coefficients avec ceux de l'expression (31), d'exprimer les coefficients a_2, b_2, C_2, A_2, D_2 en fonction de a_1, b_1, C_1, A_1, D_1 . Autrement dit, connaissant les aberrations du 3^e ordre du système optique pour une position donnée de la pupille, il est possible d'en déduire, toujours au 3^e ordre, les aberrations pour n'importe quelle autre position de pupille. Les relations de passage font simplement intervenir les positions $p'_1 = \overline{A'_p P'_1}$ et $p'_2 = \overline{A'_p P'_2}$ des pupilles de sortie, et s'écrivent :

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \\ b_2 = b_1 + a_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) \\ C_2 = C_1 + 8b_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) + 4a_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right)^2 \\ A_2 = A_1 - 4b_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) - 2a_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right)^2 \\ D_2 = D_1 + \frac{C_1 - A_1}{2} \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) + 3b_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right)^2 + a_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right)^3 \end{cases} \quad (32)$$

On note que la quantité $\mathcal{P} = C + 2A$ est invariante lors d'un déplacement de la pupille, et ce quel que soit le système optique. Cette quantité remarquable se nomme la "**courbure de Petzval**", du nom du mathématicien, inventeur et

physicien hongrois qui l'introduisit pour la première fois¹⁰ : $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$.

Détail du calcul des relations de passage de a_1, b_1, C_1, A_1, D_1 à a_2, b_2, C_2, A_2, D_2

Le passage de (α'_1, φ_1) à (α'_2, φ_2) se fait en utilisant le fait que I'_1, I'_2 et B' sont alignés sur le rayon considéré. Leurs coordonnées sont, en prenant pour origine le point A'_p :

$$I'_1 \begin{vmatrix} p'_1 \\ p'_1 \alpha'_1 \cos \varphi_1 \\ p'_1 \alpha'_1 \sin \varphi_1 \end{vmatrix}, \quad I'_2 \begin{vmatrix} p'_2 \\ p'_2 \alpha'_2 \cos \varphi_2 \\ p'_2 \alpha'_2 \sin \varphi_2 \end{vmatrix}, \quad B' \begin{vmatrix} 0 \\ y' \\ 0 \end{vmatrix} \quad (33)$$

La condition d'alignement de I'_1, I'_2 et B' s'écrit :

$$\frac{p'_2}{p'_1} = \frac{p'_2 \alpha'_2 \cos \varphi_2 - y'}{p'_1 \alpha'_1 \cos \varphi_1 - y'} = \frac{p'_2 \alpha'_2 \sin \varphi_2}{p'_1 \alpha'_1 \sin \varphi_1}. \quad (34)$$

On en déduit les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha'_1 \sin \varphi_1 &= \alpha'_2 \sin \varphi_2 \\ \alpha'_1 \cos \varphi_1 &= \alpha'_2 \cos \varphi_2 + v \end{cases} \quad (35)$$

où on a posé $v = y' \left(\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p'_2} \right)$. Ces relations permettent d'exprimer les quantités $\alpha'^2_1, \alpha'^2_1 \cos 2\varphi_1, \alpha'^3_1 \cos \varphi_1$, et α'^4_1 qui apparaissent dans (30), en fonction des quantités $\alpha'^2_2, \alpha'^2_2 \cos 2\varphi_2, \alpha'^3_2 \cos \varphi_2$, et α'^4_2 . Il vient :

$$\begin{aligned} \alpha'^2_1 &= \alpha'^2_2 + 2v\alpha'_2 \cos \varphi_2 + v^2 \\ \alpha'^2_1 \cos 2\varphi_1 &= \alpha'^2_2 \cos 2\varphi_2 + 2v\alpha'_2 \cos \varphi_2 + v^2 \\ \alpha'^3_1 \cos \varphi_1 &= \alpha'^3_2 \cos \varphi_2 + v\alpha'^2_2 (2 + \cos 2\varphi_2) + 3v^2 \alpha'_2 \cos \varphi_2 + v^3 \\ \alpha'^4_1 &= \alpha'^4_2 + 4v\alpha'^3_2 \cos \varphi_2 + 2v^2 \alpha'^2_2 (2 + \cos 2\varphi_2) + 4v^3 \alpha'_2 \cos \varphi_2 + v^4 \end{aligned} \quad (36)$$

Il suffit de remplacer dans (30) et, par identification avec (31), on obtient les relations (32).

10. Josef Petzval (1807 - 1891) : en mathématiques, on lui doit l'invention de la Transformée de Laplace. Il s'est rendu célèbre en optique pour ses travaux sur les aberrations optiques, qui l'ont conduit à mettre au point l'objectif de Petzval, à la base des techniques modernes de photographie et de cinématographie. Il consacra la dernière partie de sa vie à des travaux en acoustique.

Quatrième partie

Les aberrations du 3^e ordre du dioptré et du miroir

Cette partie résume quelques résultats démontrés en cours concernant un dioptré à symétrie de révolution séparant deux milieux d'indices n et n' , et **portant la pupille**. Ces résultats font intervenir les grandeurs suivantes :

- R , le rayon de courbure du dioptré¹¹ ;
- ε , l'ellipticité du dioptré ;
- z et z' , les distances algébriques de l'objet et de l'image (paraxiale) par rapport au sommet S ;
- h et φ , les variables d'ouverture (hauteur d'impact sur le dioptré, et angle d'azimut) associées au rayon le long duquel l'écart normal est calculé ;
- $Q_z = n' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z'} \right) = n \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z} \right)$, l'**invariant longitudinal paraxial** ;
- $Q_y = n' \frac{y'}{z'} = n \frac{y}{z}$, l'**invariant latéral paraxial**.

Les résultats concernant le miroir se déduisent de ceux du dioptré en prenant $n' = -n$.

10 Aberration sphérique

L'écart normal Δ_{AS} d'aberration sphérique du 3^e ordre du dioptré est donné par :

$$n' \Delta_{AS} = \frac{h^4}{8} Q_z^2 \left(\frac{1}{n' z'} - \frac{1}{n z} \right) + \frac{h^4}{8 R^3} \varepsilon (n' - n) \quad (37)$$

11 Coma

L'écart normal Δ_c de coma du 3^e ordre du dioptré est donné par :

$$n' \Delta_c = \frac{h^3}{2} Q_y Q_z \left(\frac{1}{n' z'} - \frac{1}{n z} \right) \cos \varphi \quad (38)$$

12 Courbures d'astigmatisme et de champ

Les courbures d'astigmatisme $A'_{\text{dioptré}}$ et de champ $C'_{\text{dioptré}}$ du 3^e ordre du dioptré sont données par :

$$\frac{A'_{\text{dioptré}}}{n'} = \left(\frac{1}{n' z'} - \frac{1}{n z} \right), \quad (39)$$

$$\frac{C'_{\text{dioptré}}}{n'} = -2 \left(\frac{1}{n' z'} - \frac{1}{n z} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right). \quad (40)$$

11. $R = \overline{SC}$ est la distance algébrique entre le sommet et le centre de courbure du dioptré

On en déduit la courbure de Petzval $\mathcal{P}'_{\text{dioptre}} = C'_{\text{dioptre}} + 2A'_{\text{dioptre}}$ du dioptre :

$$\frac{\mathcal{P}'_{\text{dioptre}}}{n'} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right), \quad (41)$$

qui est une quantité **indépendante des quantités z et z'** , et donc de la conjugaison considérée. Comme elle est également indépendante de la position de la pupille (cf. §9.2), on voit que la courbure de Petzval est une quantité intrinsèque du dioptre.

Considérons maintenant une surface dans l'espace objet, de courbure C . Après conjugaison à travers le dioptre, la courbure de champ C' de la surface image s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{C'}{n'} = \frac{C}{n} + \frac{C'_{\text{dioptre}}}{n'}. \quad (42)$$

Une relation similaire permet de relier les courbures d'astigmatisme d'un objet et de son image à travers le dioptre :

$$\frac{A'}{n'} = \frac{A}{n} + \frac{A'_{\text{dioptre}}}{n'}. \quad (43)$$

Il en va de même pour toute combinaison linéaire de C et A . Par exemple, pour la courbure de Petzval :

$$\frac{\mathcal{P}'}{n'} = \frac{\mathcal{P}}{n} + \frac{\mathcal{P}'_{\text{dioptre}}}{n'}. \quad (44)$$

Note : pour un miroir, les relations précédentes se simplifient¹² : on voit que les courbures de champ et d'astigmatisme du miroir sont indépendantes des positions z et z' , et sont égales aux valeurs que l'on trouve en configuration infini-foyer par de simples arguments géométriques : $C'_{S,\text{miroir}} = 0$, $C'_{T,\text{miroir}} = -4/R$, et donc $C'_{\text{miroir}} = -2/R$, $A'_{\text{miroir}} = 2/R$.

13 Distorsion

Pour un dioptre (portant la pupille) le coefficient de distorsion du 3^e ordre, D , est donné par :

$$D = \frac{1}{2z'^2} \left[1 - \left(\frac{n'}{n} \right)^2 \right]. \quad (45)$$

On note qu'il est indépendant du rayon de courbure du dioptre, comme on pouvait s'y attendre, puisque le décalage latéral de l'image associé à la distorsion ne dépend pas de la dimension de la pupille.

Pour le miroir (portant la pupille), on retrouve que $D = 0$.

¹². On rappelle la relation de conjugaison du miroir dans le régime paraxial : $1/z + 1/z' = 2/R$.