

**CONCEPTION DE SYSTÈMES OPTIQUES**  
**Méthodes d'évaluation des aberrations**  
*Résumé du cours*

*Ces quelques pages constituent une synthèse du cours  
sur les méthodes et critères d'évaluation des aberrations.*

Cursus/option : Cursus Ingénieur Palaiseau / 2<sup>ème</sup> année  
Date de mise à jour : Septembre 2020  
Autrice : Gaëlle Lucas-Leclin, Maîtresse de Conférences

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>I. ÉCART NORMAL</b>	<b>1</b>
1. DÉFINITION	1
2. PROPRIÉTÉS	1
<b>II. L'APPROCHE GÉOMÉTRIQUE</b>	<b>3</b>
1. DÉCOMPOSITION POLYNOMIALE DES ABERRATIONS TRANSVERSES	3
2. RELATIONS DE NIJBOER	3
<b>III. L'APPROCHE ONDULATOIRE</b>	<b>5</b>
1. RÉPONSE PERCUSSIONNELLE INCOHÉRENTE	5
3. RAPPORT DE STREHL	6
4. CRITÈRE DE MARÉCHAL	7
5. FONCTION DE TRANSFERT DE MODULATION	7

# MÉTHODES D'ÉVALUATION DES ABERRATIONS

## I. ÉCART NORMAL

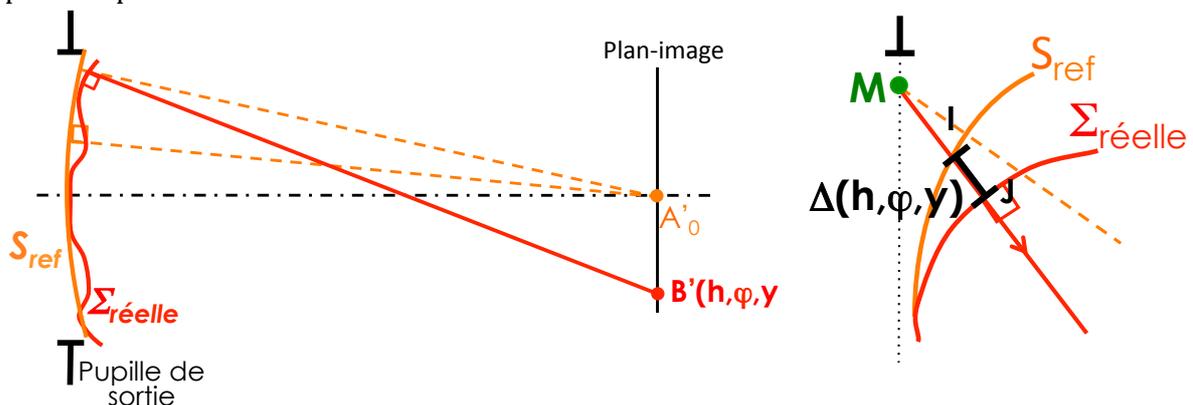
### 1. DÉFINITION

L'écart normal aberrant est, par définition, la **distance entre une surface d'onde de référence (sphérique) et la surface d'onde réelle mesurée sur le rayon réel.**

$$\Delta(h, \varphi) = \overline{S_{ref} \Sigma_{Réelle}} = \overline{IJ}$$

Cette grandeur est fonction de la hauteur d'impact dans la pupille  $h$ , de l'angle d'azimut dans la pupille  $\varphi$ ; elle dépend évidemment aussi du point objet considéré. L'écart normal est lié au déphasage de l'onde aberrante par rapport à la référence, au travers de la relation  $\Phi(h, \varphi) = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta(h, \varphi)$ .

Dans de nombreux cas, nous nous intéressons à l'écart normal pour une surface d'onde dans le plan de la pupille de sortie, et par rapport à une référence centrée sur l'image paraxiale; ce n'est cependant pas une contrainte forte.



Définition de l'écart normal aberrant

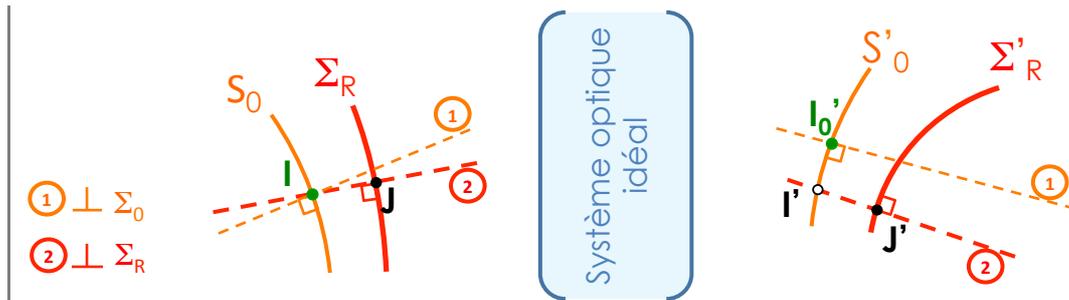
### 2. PROPRIÉTÉS

#### THÉORÈME DE GOUY

**Le chemin optique aberrant ( $n\Delta$ ) est invariant le long d'un rayon optique.** Cette propriété découle de l'application du principe de Fermat, selon lequel la trajectoire effectivement suivie par la lumière entre deux points A et B est une extrême du chemin optique : le chemin optique (AB) ne varie donc au plus qu'au 2<sup>ème</sup> ordre avec un déplacement des points A ou B.

#### DÉMONSTRATION

Considérons un système optique idéal, non-aberrant dans la conjugaison étudiée;  $\Sigma_R$  est la surface d'onde aberrante incidente sur le système, qui devient  $\Sigma'_R$  après le système optique. La surface d'onde aberrante est comparée dans l'espace-objet à une surface de référence sphérique  $S_0$ , qui devient  $S'_0$  dans l'espace-image. I (respectivement I') est l'intersection d'un rayon de référence (1) avec la surface  $S_0$  (resp.  $S'_0$ ), J (resp. J') est l'intersection du rayon réel (2) considéré avec la surface  $\Sigma_R$  (resp.  $\Sigma'_R$ ) et I' est l'intersection de ce même rayon avec la surface de référence  $S'_0$ .



Propagation des surfaces d'onde au travers d'un système optique stigmatique; définition des points caractéristiques.

Le chemin optique (JJ'), mesuré sur le rayon réel, s'exprime également :

$$(JJ') = (JI) + (II') + (I'J') \\ = -n\Delta + (II') + n'\Delta' \text{ par définition de l'écart normal}$$

Or, les chemins optiques (II'o), pour passer de  $S_0$  à  $S'_0$ , et (JJ'), entre  $\Sigma_R$  et  $\Sigma'_R$ , sont égaux par le choix même de ces surfaces d'onde : le temps de propagation au travers du système optique de  $S_0$  à  $S'_0$  est égal à celui entre  $\Sigma_R$  et  $\Sigma'_R$ . D'autre part, la trajectoire (II'o) n'est pas réellement suivie par la lumière, mais elle est proche de la trajectoire réelle (II') : par application du théorème de Fermat,  $(II'o) \cong (II')$ . Ainsi,  $n\Delta \cong n'\Delta'$ .

Le théorème de Gouy a un corollaire : **les contributions au chemin optique aberrant** après un ensemble d'optiques aberrantes **s'ajoutent le long du rayon réel** :

$$(n\Delta)' = \sum_i (n\Delta)_i$$

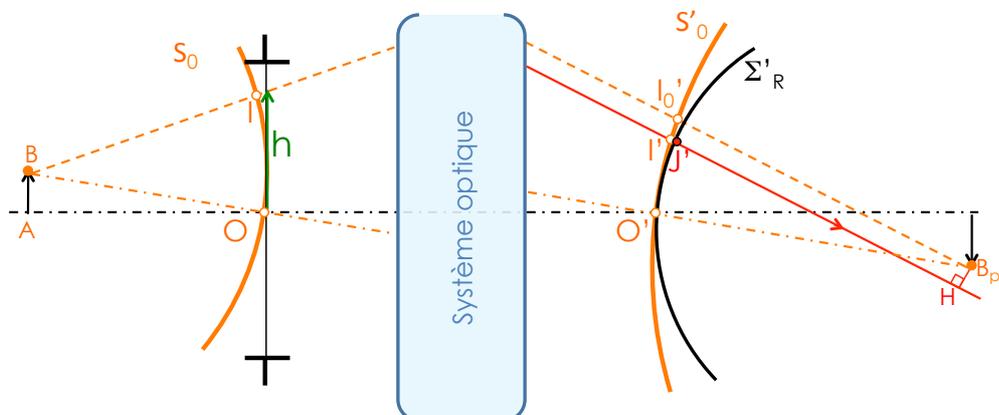
Ce résultat implique donc que l'on pourra *compenser* les défauts d'un système optique par un autre correctement choisi : c'est la base de la conception de systèmes optiques.

#### CHEMIN OPTIQUE & ÉCART NORMAL

Le chemin optique aberrant ( $n\Delta$ ) s'évalue à partir de la différence entre le chemin optique  $L_0$  mesuré sur un rayon de référence paraxial et le chemin optique réel  $L$ .

#### *DÉMONSTRATION*

Considérons un dispositif optique effectuant l'image d'un point B ; l'image paraxiale de B est  $B'_p$ , centre de la sphère de référence  $S'_0$  qui représente la surface idéale convergeant en ce point. Un rayon (BI) dans l'espace-objet est dévié par le système en un rayon réel (I'J') qui ne passe pas en  $B'_p$  : on note H la projection de  $B'_p$  sur ce rayon. La surface d'onde réelle,  $\Sigma'_R$ , est perpendiculaire en J' au rayon réel. Un rayon paraxial de référence issu de B et passant par le centre O de la pupille d'entrée sort du système en passant par O' et  $B'_p$ . Par définition, le chemin optique aberrant induit par le système optique est  $(n\Delta)' = (I'J') = n'I'J'$ .



Comparaison des surfaces d'onde de référence  $S'_0$  et réelle  $\Sigma'_R$

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, le système optique est stigmatique : le chemin optique  $L_0 = (BB'_p)$  ne dépend pas du rayon considéré. Ainsi, on peut écrire  $L_0 = (BO') + (O'B'_p) = (BI'o) + (I'oB'_p)$ .

Le chemin optique  $L$ , mesuré sur le rayon réel, est  $L = (BJ') + (J'I) + (I'H)$ . Notons que  $H$  appartient à la même surface d'onde que  $B'_p$ , c'est-à-dire que le rayon théorique et le rayon réel atteignent respectivement  $B'_p$  et  $H$  au même instant.

Ainsi,  $L_0 - L = (BO') + (O'B'_p) - (BJ') + (n\Delta)' - (I'H)$ .

Or, par le choix fait des surfaces d'onde,  $(BO') = (BJ')$ . De plus,  $\overline{I'H} \cong \overline{I'B'_p}$ , ce que l'on peut déduire une fois encore du principe de Fermat, ou en comparant ces distances dans le triangle rectangle  $[I'HB'_p]$ . Et  $\overline{I'B'_p} = \overline{O'B'_p}$  est simplement le rayon de la sphère de référence  $S'_0$ .

On en déduit que  $L_0 - L \cong (n\Delta)'$ , relation qui pourra être utilisée pour évaluer l'écart normal aberrant d'un dioptre par exemple.

## II. L'APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

La description purement géométrique des aberrations, largement répandue pour décrire les systèmes optiques, s'appuie sur la trajectoire des rayons au travers du dispositif ; à chaque dioptre, les relations de Snell-Descartes décrivent la déviation du rayon lumineux (en réfraction ou réflexion). On s'intéresse alors à l'impact des rayons dans le plan-image considéré, en fonction de leur position dans la pupille mesurée par les grandeurs pupillaires  $h$  et  $\varphi$ , par rapport à un point de référence  $B'_0$ . Le vecteur  $\overrightarrow{B'_0 B'}$ , défini dans un plan transverse à l'axe optique, est décrit par ses coordonnées  $dx(h,\varphi)$  et  $dy(h,\varphi)$ , qui mesurent les aberrations transverses du système optique.

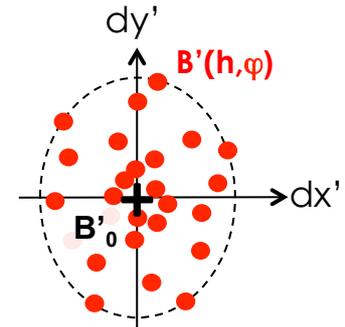


Diagramme de points (spot-diagramme) dans le plan image

### 1. DÉCOMPOSITION POLYNOMIALE DES ABERRATIONS TRANSVERSES

Les aberrations transverses  $(dx, dy)$  s'écrivent sous la forme d'un développement limité en  $h$  et  $y$  (ou, de manière strictement équivalente, en  $\alpha$  et  $y$ ). Selon le champ  $y$  et l'ouverture  $h$  ( $\alpha$ ) considérés, le développement devra être poussé à un ordre plus ou moins élevé pour décrire les aberrations géométriques du système optique. Dans le cas d'un système optique centré, à symétrie de révolution, la symétrie du problème permet de montrer que les aberrations transverses s'écrivent sous une forme polynomiale simplifiée ; en particulier, seuls apparaissent des termes d'ordre  $N$  impair, de la forme  $\alpha^{N-p} y^p$ . Sous cette forme, chaque terme de la décomposition polynomiale est associé à une aberration particulière : c'est la décomposition de Seidel.

$$dy'(\alpha', \varphi, y') = \left\{ a \alpha'^3 \cos \varphi + b y' \alpha'^2 (2 + \cos 2\varphi) + \frac{1}{2}(A - C) y'^2 \alpha' \cos \varphi + d y'^3 \right\} \\ + \{ B_1 \alpha'^5 \cos \varphi + y \alpha'^4 (B_2 + B_3 \cos 2\varphi) + y^2 \alpha'^3 \cos \varphi (B_4 + B_5 \cos 2\varphi) + \dots \} \\ + \{ C_1 \alpha'^7 \cos \varphi + \dots \}$$

$$dx'(\alpha', \varphi, y') = \left\{ a \alpha'^3 \sin \varphi + b y' \alpha'^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(-A - C) y'^2 \alpha' \sin \varphi \right\} + \{ \dots \} + \dots$$

### 2. RELATIONS DE NIJBOER

Les rayons lumineux sont perpendiculaires en tout point à la surface d'onde aberrante  $\Sigma_R$  ; ainsi, la connaissance de la forme de la surface d'onde (ou de l'écart de cette surface par rapport à une surface sphérique de référence) permet de prévoir l'impact des rayons dans le plan image de référence, et donc de simuler la tache-image. Les relations de Nijboer expriment les aberrations transverses en fonction des dérivées partielles de l'écart normal  $\Delta(\alpha, \varphi)$ .

$$\begin{cases} dy(\alpha, \varphi) = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}\right) \frac{1}{\cos \alpha} \cos \varphi - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right) \frac{1}{\sin \alpha} \sin \varphi \\ dx(\alpha, \varphi) = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}\right) \frac{1}{\cos \alpha} \sin \varphi + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right) \frac{1}{\sin \alpha} \cos \varphi \end{cases}$$

Dans ces relations,  $dy$  et  $dx$  sont les coordonnées, dans le plan-image, du point d'impact B' par rapport au centre de la sphère de référence choisie;  $\alpha$  est l'angle d'ouverture et  $\varphi$  l'angle d'azimut, variables qui déterminent l'impact du rayon réel dans le plan de la pupille.

Remarquons que l'on peut, en règle générale, utiliser dans ces relations les approximations  $\cos \alpha \cong 1$  et  $\sin \alpha \cong \alpha$ , qui restent valables jusqu'à des ouvertures élevées<sup>1</sup>, au-delà du domaine du 3<sup>ème</sup> ordre.

#### DÉMONSTRATION

Il s'agit de déterminer les coordonnées du vecteur normal à la surface aberrante  $\Sigma_R$ , et d'en déduire l'intersection du rayon porté par ce vecteur avec le plan-image, situé par définition dans le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par le centre C de la sphère de référence choisie. La démonstration est menée dans le plan tangential ( $\varphi = 0 / \pi$ ) pour simplifier le formalisme, elle s'extrapole évidemment au cas général [Sabater].

Dans le système de coordonnées (YOZ) de la pupille, l'équation de la surface d'onde aberrante  $\Sigma_R$  est  $Y^2 + (Z - R)^2 = (\Delta(Y) - R)^2$ . Les coordonnées du vecteur  $\vec{t}$ , tangent à la surface au point J(Z,Y), et du vecteur  $\vec{n}$  normal à la surface au même point, sont :

$$\vec{t} \left( t_z = 1, t_y = \frac{\partial Y}{\partial Z} \right)$$

$$\vec{n} \left( n_z = 1, n_y = -\frac{\partial Z}{\partial Y} \Big|_{\Sigma_R} = -\left(\frac{\Delta - R}{Z - R}\right) \times \frac{\partial \Delta}{\partial Y} + \frac{Y}{Z - R} \right)$$

L'équation du rayon passant par le point J(Z,Y) et de vecteur directeur  $\vec{n}$  s'en déduit aisément, pour un point courant M(Z<sub>1</sub>,Y<sub>1</sub>) :

$$Y_1 = -\frac{\partial Z}{\partial Y} \Big|_{\Sigma_R} (Z_1 - Z) + Y$$

C'est l'équation du rayon passant par J et perpendiculaire à la surface d'onde aberrante  $\Sigma_R$ . Alors, l'intersection de ce rayon avec le plan-image est le point B'(Z<sub>1</sub> = R, Y<sub>1</sub>) tel que :

$$dy = Y_1(Z_1 = R) \cong -R \frac{\partial \Delta}{\partial Y}$$

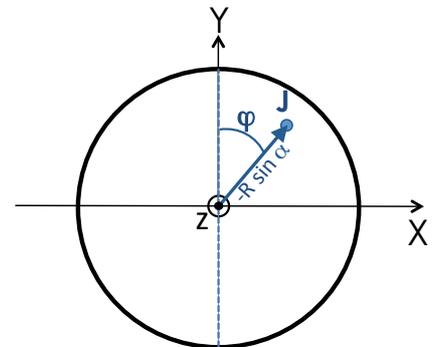
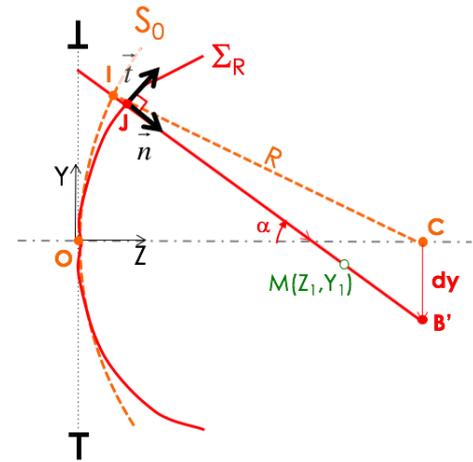
Cette relation est obtenue en négligeant  $\Delta$  devant R dans l'expression de  $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ .

Dans le cas général, on obtient les relations suivantes, qui font explicitement intervenir les dérivées partielles de l'écart normal  $\Delta(h, \varphi)$  dans le système de coordonnées (X,Y,Z) choisi :

$$\begin{cases} dy(h, \varphi) = -R \frac{\partial \Delta}{\partial Y}(h, \varphi) \\ dx(h, \varphi) = -R \frac{\partial \Delta}{\partial X}(h, \varphi) \end{cases}$$

L'expression la plus commune des relations de Nijboer s'écrit en fonction des dérivées partielles dans le système de coordonnées pupillaires cylindriques ( $\alpha, \varphi$ ), qui présente l'avantage de ne plus faire intervenir la grandeur R, choisie arbitrairement ; il suffit de lier les coordonnées cartésiennes (X,Y) aux coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} Y = h \cos \varphi \cong -R \sin \alpha \times \cos \varphi \\ X = h \sin \varphi \cong -R \sin \alpha \times \sin \varphi \end{cases}$$



<sup>1</sup> un écart de 10% par rapport à l'approximation est obtenu au-delà de  $\cos(\alpha = 0,45) = 0,90$  et  $\sin(\alpha = 0,85) = 0,75$ .

d'où l'on déduit la relations ci-dessus en exprimant les dérivées partielles  $\frac{\partial \Delta}{\partial Y}$  et  $\frac{\partial \Delta}{\partial X}$  en fonction de  $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}$  et  $\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}$ .

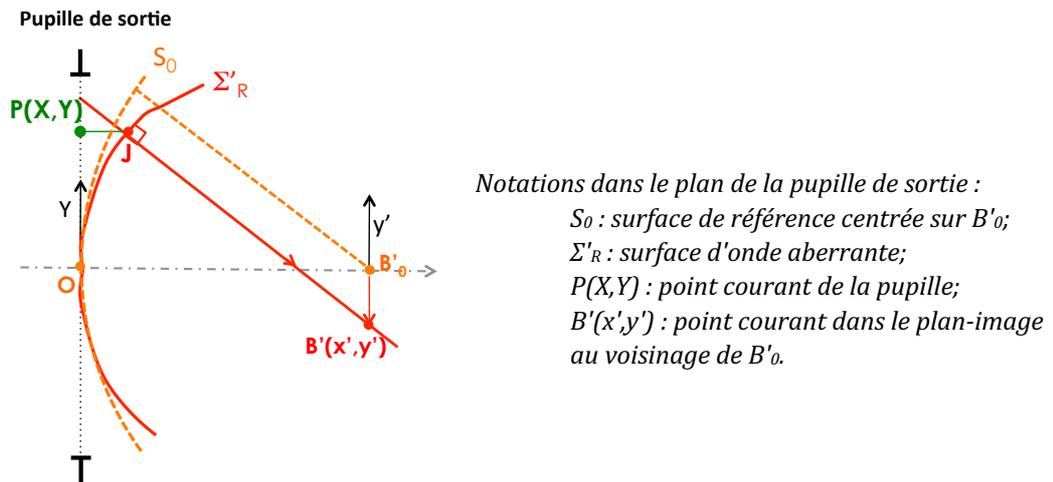
### III. L'APPROCHE ONDULATOIRE

#### 1. RÉPONSE PERCUSSIONNELLE INCOHÉRENTE

La réponse percussionnelle incohérente<sup>2</sup> (RPI) décrit la **répartition d'éclairement au voisinage du point de référence**  $B'_0$  choisi, pour un point-source objet. Elle s'évalue par le module carré du champ optique  $|U(B')|^2$  dans le plan considéré. La réponse percussionnelle est en général exprimée dans le cadre de l'approximation de Fresnel de la diffraction, qui néglige la nature vectorielle du champ optique (pas de prise en compte de la polarisation), et suppose des angles d'incidence faibles. Alors, le champ optique au point  $B'(x',y')$  dans le plan-image de coordonnée axiale  $z_0$  se déduit du champ  $U_0(X,Y)$  dans le plan de la pupille de sortie :

$$U(B'(x', y', z_0)) \cong \frac{-i}{\lambda z_0} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z_0} \iint U_0(X, Y) \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda} \frac{(X-x')^2}{z_0} + i\frac{\pi}{\lambda} \frac{(Y-y')^2}{z_0}\right) dXdY$$

L'intégration est ici effectuée sur la pupille, décrite en coordonnées cartésiennes  $(X,Y)$  pour en simplifier l'expression ;  $z_0$  est la distance entre la pupille de sortie et le plan-image considéré.



L'expression du champ  $U_0(X,Y)$  fait quant à elle intervenir l'écart normal aberrant  $\Delta(X,Y)$ , mesurée entre la surface d'onde réelle  $\Sigma'_R$  et une surface d'onde de référence, sphérique, convergente et centrée sur  $B'_0$  :

$$U_0(X, Y) = A_0 \times p_0(X, Y) \times \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z_0} - i\frac{2\pi}{\lambda} \Delta(X, Y)\right)$$

L'origine des phases est choisie, par souci de simplicité et sans que cela n'impacte le résultat final, dans le plan de la pupille de sortie.  $p_0(X, Y)$  est la fonction de transmission de la pupille, qui décrit en particulier sa géométrie.

<sup>2</sup> Le terme "incohérent" renvoie au mode d'éclairage du point-source ; deux points voisins dans le plan-image n'interfèrent pas entre eux. Ce sont donc les éclairements qui se somment dans le plan-image – et non les champs.

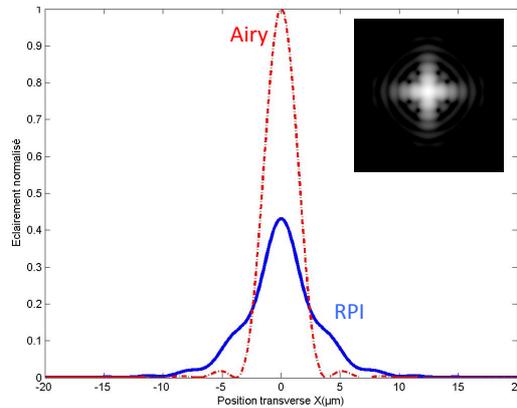
Ainsi, le champ optique dans le plan-image considéré, au voisinage du point de référence  $B'_0$ , est une onde sphérique divergente, d'amplitude :

$$U(B') = \frac{-i}{\lambda z_0} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} z_0} A_0 \times \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda} \frac{x'^2 + y'^2}{2z_0}\right) \\ \times \iint_{PS} p_0(X, Y) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \Delta(X, Y)\right) \times \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda z_0} (X \cdot x' + Y \cdot y')\right) dXdY$$

Cette expression fait explicitement apparaître une relation de transformée de Fourier, qui permet d'écrire de manière plus compacte la réponse percussionnelle incohérente :

$$RPI(x', y') = |U(B')|^2 = \frac{A_0^2}{(\lambda z_0)^2} \left| TF\left(p_0(X, Y) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \Delta(X, Y)\right)\right) \right|_{\left(\frac{x'}{\lambda z_0}, \frac{y'}{\lambda z_0}\right)}^2$$

La RPI est donc **proportionnelle au module carré de la transformée de Fourier du front d'onde  $p(X, Y)$  dans le plan de la pupille**, calculée aux fréquences spatiales  $\left(\frac{x'}{\lambda z_0}, \frac{y'}{\lambda z_0}\right)$ . Dans le cas d'une pupille circulaire, et en l'absence d'aberrations, la réponse percussionnelle est une tache d'Airy. Dans le cas général, il n'y a pas d'expression analytique de la RPI, il est nécessaire d'utiliser des outils numériques pour la simuler.



Profil de la réponse percussionnelle incohérente associée à un écart normal d'astigmatisme d'amplitude  $\Delta_{PV} = 0,70 \lambda$  ; en insert, RPI en échelle logarithmique.

Il est souvent fait référence à la RPI normalisée, qui décrit le profil d'éclairement de la RPI et prend des valeurs comprises entre 0 et le rapport de Strehl  $R_S$  :

$$RPI_{norm}(x', y') = \frac{1}{(\pi h_{max}^2)^2} \left| TF(p(X, Y)) \right|_{\left(\frac{x'}{\lambda z_0}, \frac{y'}{\lambda z_0}\right)}^2$$

### 3. RAPPORT DE STREHL

Le rapport de Strehl mesure le rapport entre le maximum d'éclairement dans la réponse percussionnelle aberrante et le maximum absolu en limite de diffraction  $E_{max}$ . Ce rapport est toujours inférieur à 1. Choisissons  $B'_0$ , centre de la sphère de référence, au maximum d'éclairement de la réponse percussionnelle; alors, le rapport de Strehl est donné par la relation :

$$R_S = \frac{RPI(0,0)}{E_{max}}$$

avec  $E_{max} = \frac{(\pi h_{max}^2)^2}{(\lambda z_0)^2} A_0^2$  dans le cas d'une pupille circulaire – c'est l'éclairement au centre de la tache d'Airy.

Ainsi, le rapport de Strehl s'exprime sous la forme analytique :

$$R_S = \frac{1}{(\pi h_{max}^2)^2} \left| \iint_{PS} p_0(h, \varphi) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \Delta(h, \varphi)\right) h dh d\varphi \right|^2$$

où l'intégration est effectuée sur la pupille de sortie, dans laquelle est évalué l'écart normal  $\Delta(h, \varphi)$ .

Dans le cas général, le rapport de Strehl s'évalue à partir du calcul numérique de la RPI ; lorsque les aberrations sont faibles, des expressions approchées analytiques peuvent être utilisées, qui font apparaître la variance de l'écart normal aberrant  $\sigma_\Delta^2$  :

$$R_S \cong 1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sigma_\Delta^2$$

ou préférentiellement

$$R_S \cong \exp\left(-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sigma_\Delta^2\right)$$

Il est important de remarquer que, de par sa définition, le rapport de Strehl n'apporte d'information réellement quantitative sur la réponse percussionnelle que lorsque celle-ci diffère peu de la RPI du système en limite de diffraction, soit typiquement tant que  $R_S \geq 10\%$  ( $\sigma_\Delta \leq 0,20 \lambda$ ).

#### 4. CRITÈRE DE MARÉCHAL

Les expressions approchées de  $R_S$  démontrent clairement qu'une grandeur pertinente pour quantifier l'importance d'une aberration est **l'écart-type de l'écart normal aberrant  $\sigma_\Delta$** . Le critère de Maréchal définit l'amplitude maximale de  $\sigma_\Delta$  pour laquelle  $R_S$  reste supérieur à 80%, limite usuellement acceptée par les opticiens ; à partir de l'approximation analytique linéaire ci-dessus, il est immédiat de vérifier que cela correspond à  $\sigma_\Delta \leq 0,07 \lambda \cong \lambda/14$ .

L'application du critère de Maréchal aux aberrations du 3<sup>ème</sup> ordre, exprimées dans la décomposition de Seidel et pour une mise au point paraxiale, permet d'évaluer les amplitudes picvallée maximales de chaque défaut pour respecter ce critère :

<i>Aberration</i>	<i>Expression de l'écart normal</i>	<i>Amplitude maximale</i>
Défaut de mise au point	$\Delta(h, \varphi) = \Delta_{\max} \left(\frac{h}{h_{\max}}\right)^2$	$\Delta_{\text{PV}} = \Delta_{\max} = \lambda/4$
Aberration Sphérique	$\Delta(h, \varphi) = \Delta_{\max} \left(\frac{h}{h_{\max}}\right)^4$	$\Delta_{\text{PV}} = \Delta_{\max} = 0,24 \lambda \cong \lambda/4$
Coma	$\Delta(h, \varphi) = \Delta_{\max} \left(\frac{h}{h_{\max}}\right)^3 \cos \varphi$	$\Delta_{\text{PV}} = 2 \Delta_{\max} = 0,40 \lambda$
Astigmatisme	$\Delta(h, \varphi) = \Delta_{\max} \left(\frac{h}{h_{\max}}\right)^2 \cos 2\varphi$	$\Delta_{\text{PV}} = 2 \Delta_{\max} = 0,34 \lambda$

#### 5. FONCTION DE TRANSFERT DE MODULATION

La fonction de transfert incohérente<sup>3</sup> (FTI) d'un système optique est la **transformée de Fourier normalisée de sa réponse percussionnelle**:

$$FTI(\vec{\sigma}') = \iint RPI(\vec{r}') \exp(-2i\pi \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}') d^2 r' / \iint RPI(\vec{r}') d^2 r'$$

où  $\vec{r}'(x', y')$  est le vecteur position dans le plan-image;

$\vec{\sigma}'(v'_x, v'_y)$  est le vecteur des fréquences spatiales, dans l'espace de Fourier.

Cette fonction de transfert est définie dans le cas d'un éclairage spatialement incohérent<sup>2</sup>, sans interférences entre points adjacents. La FTI est une grandeur complexe, on s'intéresse souvent à son module  $|FTI(\vec{\sigma}')|$  que l'on appelle alors "fonction de transfert de modulation" (FTM) et qui représente le contraste de l'image d'une mire sinusoidale de fréquence  $\vec{\sigma}'$ .

<sup>3</sup> ou fonction de transfert optique.

La notion même de fonction de transfert d'un dispositif optique fait explicitement référence au formalisme des filtres linéaires : un système optique transforme l'image d'un objet donné en modifiant le contraste (voire la phase) des différentes composantes spectrales qui le constituent – décrites par leur fréquence spatiale bidimensionnelle  $\vec{\sigma}$ . Ainsi, dans l'espace de Fourier des fréquences spatiales, le spectre  $G_I(\vec{\sigma})$  de l'image obtenue par un système optique est :

$$G_I(\vec{\sigma}) = G_O\left(\vec{\sigma} = \frac{\vec{\sigma}}{g_y}\right) \times FTI(\vec{\sigma})$$

Notons qu'en toute rigueur, la fonction de transfert est définie pour un système ; dans le contexte de l'étude de systèmes aberrants, il nous faut plutôt considérer une FTI définie localement, sur une zone transverse du plan objet pour laquelle la réponse percussionnelle du système est invariante par translation. Enfin, la définition de la fonction de transfert, en tant que transformée de Fourier de la réponse percussionnelle, n'est pas restreinte à la prise en compte de la diffraction pour la description de la RPI; cette définition reste valable et applicable pour une description purement géométrique de la réponse percussionnelle, dans le cas de systèmes fortement aberrants.

#### EXPRESSION DE LA FONCTION DE TRANSFERT INCOHÉRENTE

Du fait de l'expression de la réponse percussionnelle incohérente (cf. III.1), il apparaît que la FTI peut s'écrire comme l'autocorrélation normalisée de la pupille [Dubois]:

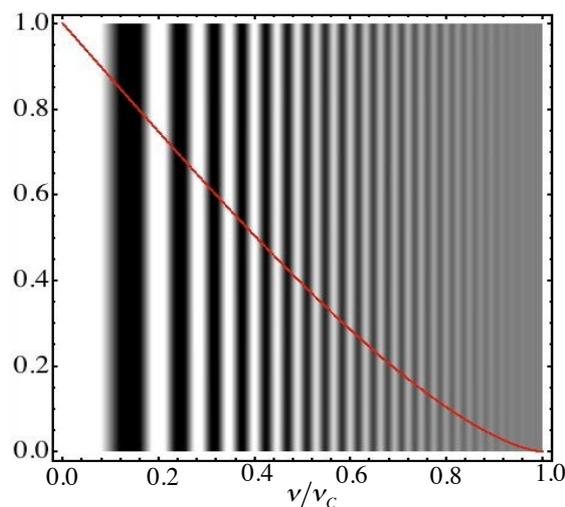
$$FTI(\vec{\sigma}) = \frac{[p(\vec{r}) \otimes p(\vec{r})](\lambda z_0 \vec{\sigma})}{[p(\vec{r}) \otimes p(\vec{r})](\vec{0})}$$

où la fonction pupille  $p(\vec{r}) = p_0(\vec{r}) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta(\vec{r})\right)$  prend en compte le déphasage aberrant.

Dans le cas d'un système optique à pupille circulaire homogène en limite de diffraction, la FTI est une fonction réelle, de module :

$$FTM_0(\sigma') = \frac{2}{\pi} \left( \arccos\left(\frac{\sigma'}{v_c}\right) - \frac{\sigma'}{v_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma'}{v_c}\right)^2} \right)$$

où  $v_c = 2h_{max}/\lambda z_0 = \frac{2 \sin \alpha'_m}{\lambda}$  est la fréquence de coupure du dispositif, au-delà de laquelle la FTI est rigoureusement nulle.



*Coupe de la FTI d'un système optique à pupille circulaire en limite de diffraction; la mire de fréquence spatiale croissante reproduit le contraste associé.*

Dans le cas général d'un système présentant des aberrations géométriques, il n'existe pas d'expression analytique de la FTI; celle-ci sera donc évaluée numériquement. L'inégalité de

Cauchy-Schwarz impose une relation entre la FTI réelle et celle d'un système de même ouverture numérique en limite de diffraction :

$$|FTI(\vec{\sigma}')| \leq FTM_0(\vec{\sigma}')$$

Ainsi, quelle que soit la fréquence spatiale considérée, le contraste d'une image fournie par un dispositif optique aberrant ne saurait être supérieur à celui que l'on obtiendrait avec un dispositif idéal.

*DÉMONSTRATION*

Nous pouvons tout d'abord remarquer que pour le système aberrant (SO) comme pour le système de même ouverture numérique en limite de diffraction (SO<sub>0</sub>), les autocorrélations de la pupille à la fréquence  $|\vec{\sigma}'| = 0$  sont identiques – égales à l'aire de la pupille géométrique :

$$[p(\vec{r}) \otimes p(\vec{r})](\vec{0}) = \iint p(\vec{r}) \times p^*(\vec{r}) d^2r = \iint |p(\vec{r})|^2 d^2r = [p_0(\vec{r}) \otimes p_0(\vec{r})](\vec{0})$$

Ainsi, il nous suffit de comparer les termes  $[p(\vec{r}) \otimes p(\vec{r})](\lambda z_0 \vec{\sigma}')$  pour SO et SO<sub>0</sub> :

$$[p(\vec{r}) \otimes p(\vec{r})](\lambda z_0 \vec{\sigma}') = \iint p(\vec{r}) \times p^*(\vec{r} - \lambda z_0 \vec{\sigma}') d^2r$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit pour cette intégrale :

$$\left| \iint p(\vec{r}) \times p^*(\vec{r} - \lambda z_0 \vec{\sigma}') d^2r \right| \leq \iint |p(\vec{r}) \times p^*(\vec{r} - \lambda z_0 \vec{\sigma}')| d^2r = \iint p_0(\vec{r}) \times p_0^*(\vec{r} - \lambda z_0 \vec{\sigma}') d^2r$$

d'où le résultat annoncé.

RELATION AVEC LE RAPPORT DE STREHL

Par définition, la RPI est proportionnelle à la transformée de Fourier inverse de la FTI. En particulier, au centre de la réponse percussionnelle la RPI est simplement proportionnelle à l'intégrale de la FTI – soit le volume "sous" la fonction de transfert.

$$RPI(\vec{0}) \propto \iint FTI(\vec{\sigma}') d^2\sigma'$$

Or, la valeur  $RPI(\vec{0})$ , éclairement au centre de la RPI, normalisée à la valeur correspondante du système de même ouverture numérique sans aberrations est par définition le rapport de Strehl (cf. III.2). Ainsi donc, le rapport de Strehl peut également s'évaluer par le rapport des intégrales de la FTI avec et sans aberrations :

$$R_s = \frac{\iint FTI(\vec{\sigma}') d^2\sigma'}{\iint FTM_0(\vec{\sigma}') d^2\sigma'}$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Dubois] Cours d'Optique de Fourier, A. Dubois  
[Chavel] Cours d'Aberrations & Diffraction, P. Chavel  
[Sabater] Cours de Conception Optique, J. Sabater  
[Goodman] Introduction to Fourier Optics, J.W. Goodman  
[Gross] Handbook of Optical Systems, vol. 3, H. Gross  
[Runciman] Éléments de Conception Optique, H. Runciman, *Techniques de l'Ingénieur E4040*  
[Maréchal] Imagerie Géométrique. Aberrations, A. Maréchal  
[Cagnet] Formation des Images. Aberrations, C. Cagnet (polycopié de cours)