Université Evry Paris-Saclay **Année universitaire 2026-2027**
L1 SDVC - Analyse et probabilités

TD1
Analyse - Fonctions

Exercice 1 (*)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le plus grand ensemble de définition possible :

1. (*) $f(x) = \sqrt{-2x+5}$
2. (*) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{5x-1}$
3. (*) $f(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)$
4. $f(x) = \sqrt{x(x-1)(x+2)}$
5. $f(x) = \ln(4x - x^3)$
6. $f(x) = \ln(x^2 - 2)$
7. $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$
8. $g(x) = \sqrt{e^{-x}} - \frac{\sin x}{x-1}$
9. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$
11. $f(x) = \ln(4 - x^2)$
12. $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$
13. $f(x) = x - 5e^{\frac{1}{x-6}}$
14. $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$

Exercice 2 (*)

Soit u et v deux fonctions. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$ dans chacun des cas suivants :

1. (*) $u : x \mapsto 2x - 8$ et $v : x \mapsto x^2$
2. $u : x \mapsto 2^x$ et $v : x \mapsto x^2 - x - 2$
3. $u : x \mapsto e^{x^2-3}$ et $v : x \mapsto x^3 - 8$
4. $u : x \mapsto \frac{x-1}{x}$ et $v : x \mapsto 2x + 3$

Exercice 3 (*)

Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires, ni paire ni impaire ?

1. (*) $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2+1}$
2. (*) $f(x) = x^2 - 1 + \sin^2(x)$
3. (*) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
4. $f(x) = \frac{\tan(x)-x}{x^2\cos(x)}$
5. $f(x) = \sin(x^2 + 2)$
6. $f(x) = x^3 \ln(x^2 + 5)$
7. $f(x) = \frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos(x)$
8. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$

TD2
Analyse - Limites

Exercice 4 (*)

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. (*) $\lim_{x\to 1} \cos(\ln x)$
2. (*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-x+3}{2x^3-5}$
3. (*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
4. (*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos(x)}{\sqrt{x}}$
5. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x(1+x^2)}{x^3+7x-3}$
7. $\lim_{x\to -1^+} x - \frac{1}{x+1}$
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}}$
9. $\lim_{x\to-\infty} x - \frac{1}{x+1}$
10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{2x+3}$
11. $\lim_{x\to 2} (x-2)^2 \ln(x^3-1)$
12. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+1}{2x^2+5x+3}$
13. $\lim_{x\to 1} \ln(x^2-1)$
14. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-4}$
15. $\lim_{x\to-\infty} x(\frac{1}{x}+3)$
16. $\lim_{x\to+\infty} cos(\frac{1}{x})$
17. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2-1}{x}}$
18. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+x+1}$
19. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}$
20. $\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2)$
21. $\lim_{x\to+\infty} x - \ln(x)$
22. $\lim_{x\to+\infty} (1-x)\ln(x)$
23. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1}$
24. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2+\cos x}{3-x}$
25. $\lim_{x\to-\infty} (1+e^x)\sin x$
26. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+\sin e^x}{2x}$
27. $\lim_{x\to 1} (e^{2x-1} - e)$
28. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3}{1+x}}$

TD3
Analyse - Continuité et dérivabilité

Exercice 5 (*)

Déterminer les dérivées des expressions suivantes :

1. (*) $f(x) = xe^x$
2. (*) $f(x) = (2x+1)^3$
3. (*) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$
4. (*) $f(x) = e^{\sin x}$
5. $f(x) = (2\sin x + 1)^2$
6. $f(x) = x\ln(x^2-1)$
7. $f(x) = \sin(e^x)$
8. $f(x) = x\ln(x^2+1)$.
9. $f(x) = e^{x+1} + 2$
10. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$
11. $f(x) = \sqrt{\cos(x)+2}$
12. $f(x) = x^3\sin(x)$
13. $f(x) = e^{x^2-3}$
14. $f(x) = \sin(2x+1)$
15. $f(x) = (3x+2)^9$
16. $f(x) = 4x^3 + 2x - 1$
17. $f(x) = \frac{4x}{\cos(x)}$
18. $f(x) = x\cos(5x)$
19. $f(x) = \frac{x}{\sin(2x)}$
20. $f(x) = 2xe^{\cos(x)}$
21. $f(x) = (1-\frac{x}{7})^7$
22. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^4}$
23. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3+3x-7}$
24. $f(x) = \ln(x^2+1)$
25. $f(x) = \sin(x^2)$

Exercice 6

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de Morse) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha-\beta r})^2$$

où $\alpha, \beta, D > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. A l'équilibre, une molécule se trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre.

TD4
Analyse - Intégrales

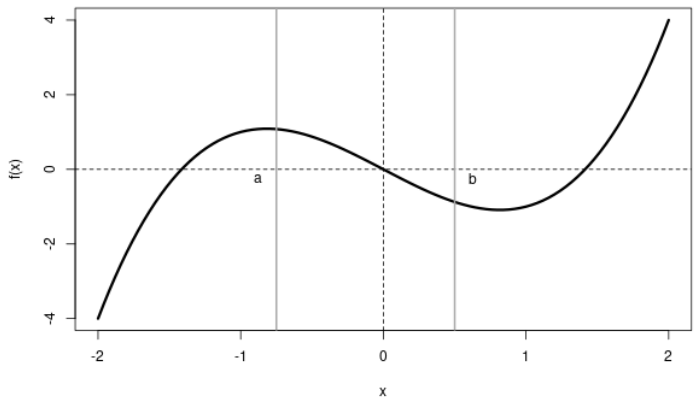
Exercice 7 (*)

Calculer les intégrales suivantes :

1. (*) $\int_0^1 (3x^3 - 2x + 1)dx$
2. (*) $\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx$
3. (*) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$
4. (*) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(2+\ln(x^2))}dx$
5. $\int_1^2 (2x^2 - 1)dx$
6. $\int_1^2 (3x^2 + 2x - 1)dx$
7. $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$
8. $\int_0^2 (2x + 1)dx$
9. $\int_0^1 e^{x+1}dx$
10. $\int_0^1 e^{2x+1}dx$
11. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$
12. $\int_1^e \frac{(\ln(x))^3}{x}dx$
13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)dx$
14. $\int_1^e \frac{1}{x(\ln(x))^3}dx$
15. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$
16. $\int_0^1 x^2 e^{x^3}dx$
17. $\int_0^1 (x^3 - 6)(x^2 + 1)dx$
18. $\int_0^1 x\sqrt{5 + x^2}dx$
19. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$
20. $\int_0^1 x(x^2 + 1)^2dx$
21. $\int_0^1 xe^x dx$
22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$
23. $\int_0^1 \ln(1 + x)dx$
24. $\int_0^1 \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Exercice 8 (*)

La figure suivante représente le graphe d'une fonction f définie sur $[-2; 2]$:



1. La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $[a, b]$ (justifier) ?
2. La fonction f est-elle paire, impaire, ni l'un ni l'autre (justifier) ?
3. Quel est le signe de $\int_a^b f(x)dx$ (justifier) ?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in [a, b]$ (justifier) ?

TD5
Analyse - Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 9 (*)

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant les intervalles sur lesquels les solutions sont définies :

1. (*) $y' = \frac{1}{2}(5 - y)$
2. (*) $y' = xy - x$
3. (*) $x^2y' + xy + 1 = 0$
4. $y' - 4y = 3$
5. $3y + 2 = 7y'$
6. $2y' - 2 = 3y$
7. $2y' = 3y$
8. $-2y = y'$
9. $3y' + 12y = 4$
10. $x^2y' = \frac{y}{2}$
11. $y' = \frac{y}{x} + x$
12. $y' = 3x^2y - x^3y'$
13. $y' = -3y + e^{-2x}$
14. $xy' + y = 0$
15. $y'(x) + 2e^{4x} = 4y(x)$
16. $xy' - x^2 = -2y$
17. $y' - 2xy = 2x$
18. $y' + y = e^{-x}$
19. $x^2y' + 3xy = -y'$
20. $y' + y = 1 - e^{-x}$
21. $xy' + x^2e^{-x} = y$
22. $y' - 4y = 2e^{3x}$

Exercice 10

Le modèle de croissance de population introduit par Verhulst suppose que l'équation régissant une population $x(t)$ est donnée par

$$x'(t) = rx(t)(A - x(t))$$

1. On suppose que la population ne s'annule jamais et on pose $y(t) = \frac{1}{x(t)}$. Montrer que

$$y'(t) = -rAy(t) + r$$

2. Résoudre cette équation et en déduire l'évolution de la population au cours du temps. Vers quelle valeur tend la population ?

TD6
Probabilités - Probabilité, indépendance, conditionnement

Exercice 11 (*)

Un examen systématique de dépistage est institué pour détecter une maladie M. On sait que le risque d'avoir cette maladie est de 0.001. L'examen donne des faux positifs avec probabilité 0.1 et des faux négatifs avec une probabilité de 0.3. Un individu subit un examen qui se révèle positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 12 (*)

Les cultures de tissus végétaux peuvent être infectées soit par des champignons, soit par des bactéries. La probabilité d'infection par champignons est de $0,15$. La probabilité d'infection par bactéries est de $0,08$.

1. Quelle est la probabilité d'une infection simultanée par champignons et bactéries :
   (a) dans le cas où les infections sont indépendantes ;
   (b) dans le cas où (les infections n'étant pas indépendantes) la probabilité d'infection par bactéries sachant qu'on a une infection par champignons est égale à $0,04$.
2. Calculer la probabilité d'infection, quelle qu'en soit l'origine (dans le cas où les infections sont indépendantes uniquement).

Exercice 13

On considère deux portées de lapereaux : la première portée est de 5 lapereaux et la deuxième de 6 lapereaux. On regroupe tous les lapereaux et on suppose que chacun a la même probabilité d'être choisi. On prélève simultanément 4 lapereaux. Calculer les probabilités d'obtenir :

1. exactement trois lapereaux de la première portée
2. au moins un lapereau de la deuxième portée

Exercice 14

Un test biologique T servant à détecter la prédisposition à une maladie M possède 3 résultats posssibles, symbolisés par 0, +, ++. Les probabilités conditionnelles d'atteinte par la maladie M dans l'année qui suit le test et les probabilités des résultats du test pour un individu pris au hasard dans la population sont les suivantes :

T	0	+	++
P(M|T)	0,1	0,2	0,4
P(T)	0,5	0,35	0,15

Calculer la probabilité P(M) pour qu'un individu, pris au hasard, soit atteint dans l'année par la maladie M.

Exercice 15

Dans une certaine population de mouches, 40% ont des petites ailes, 25% ont les yeux blancs et 20% ont à la fois des petites ailes et les yeux blancs. On extrait au hasard un individu de cette population.

1. S'il a des petites ailes, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi les yeux blancs ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'ait ni des petites ailes, ni les yeux blancs ?

Exercice 16

Dans une forêt, deux espèces de cerfs cohabitent : les cerfs rouges et les cerfs blancs. Les cerfs rouges représentent 90% de la population totale de cerfs, tandis que les cerfs blancs représentent les 10% restants. Un éthologue observe un cerf, mais à cause de la distance et des conditions de lumière, il ne peut pas déterminer sa couleur avec certitude. L'éthologue sait que lorsqu'il observe un cerf rouge (réalité), il le confond avec un cerf blanc (observation) dans 10% des cas, et lorsque qu'il observe un cerf blanc (réalité), il le confond avec un cerf rouge (observation) dans 20% des cas. Si l'éthologue observe un cerf et le prend pour un cerf blanc, quelle est la probabilité que ce soit réellement un cerf blanc ?

Exercice 17

On a mélangé des graines de deux provenances différentes : A et B. On a ainsi un ensemble de graines dont $1/3$ provient de A et $2/3$ de B. La moitié des graines de A est noire. Les trois quart des graines de B sont noires. On choisit une graine au hasard : elle est noire. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de A ?

Exercice 18

Un allèle A est présent dans une population en proportion p, de sorte que l'on peut considérer qu'un père transmet cet allèle à chaque enfant avec probabilité p. De même une mère transmet A avec probabilité p et on suppose qu'il y a indépendance entre ce que transmet le père et ce que transmet la mère.

1. Quelle probabilité a l'enfant :
   (a) de porter A en double exemplaire (homozygotie A) ?
   (b) de porter A en un seul exemplaire ?
   (c) de ne pas porter A ?

   Vérifier que la somme de ces trois probabilités vaut 1.
2. L'enfant a à son tour un descendant. Montrer que le modèle reste cohérent, c'est-à-dire que la probabilité pour qu'il transmette l'allèle A vaut p.

Exercice 19

Dans une mare cohabitent trois types de tritons. Le type A représente 60% de la population, le type B représente 30% et le type C représente 10%. Une mouette cherche à attraper un triton sans distinguer de quel type il est. Mais on sait qu'un triton A échappe à l'attaque avec probabilité 50%, un triton B échappe avec probabilité 20% et un triton C avec probabilité 5%. Quel est en pourcentage la composition en triton du repas de cette mouette ?

TD7
Probabilités - Variables aléatoires réelles
et résumés numériques d'une loi de probabilité (1/2)

Exercice 20 (*)

Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est donnée par :

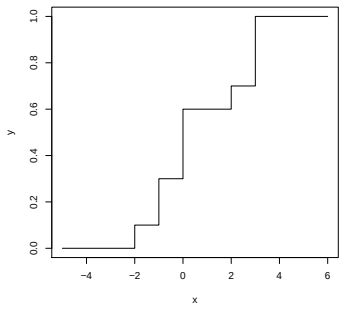
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(X \leq 4)$
2. $\mathbb{P}(X > 25)$
3. $\mathbb{P}(3 < X \leq 16)$

Exercice 21 (*)

Soit X une variable aléatoire discrète dont la fonction de répartition est donnée par la figure suivante :



1. Lire sur la figure les valeurs de $\mathbb{P}(X > 0)$, $\mathbb{P}(-2 < X \leq 1)$.
2. Donner la loi de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 22 (*)

Le temps T nécessaire à un rat pour parcourir un labyrinthe est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

t (en secondes)	2	3	4	5	6	7
$P(T = t)$	$0,1$	$0,1$	$0,3$	p_5	$0,2$	$0,1$

1. (*) Compléter le tableau en calculant $p_5 = P(T = 5)$.
2. (*) Calculer l'espérance et la variance de T.

Le rat est récompensé à l'aide d'un biscuit pour chaque seconde économisée sur un temps de parcours de 6 secondes (c'est à dire que s'il met 6 secondes ou plus, il ne reçoit rien, s'il met 5 secondes, il reçoit 1 biscuit, s'il met 4 secondes, il reçoit 2 biscuits, etc).

3. Donner la loi de probabilité de la variable récompense R égale au nombre de biscuits reçus.
4. Calculer l'espérance de R.
5. Supposons que le rat soit puni par un choc électrique dont la puissance augmente fortement avec le temps mis à parcourir le labyrinthe, soit un choc de T^2 volts pour un temps de T secondes. Calculer la punition moyenne du rat.
6. Reprendre la question précédente en supposant que la punition est un choc électrique dont la puissance varie avec le temps selon la formule P = 10 T+5 (la puissance du choc électrique est exprimée en volts). Calculer de deux façons différentes la punition moyenne ainsi que Var (P).

Exercice 23

On se donne une fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour quelle valeur de k cette fonction est-elle une densité de probabilité ?

TD8
Probabilités - Variables aléatoires réelles
et résumés numériques d'une loi de probabilité (2/2)

Exercice 24 (*)

Le nombre X de kilogrammes de tomates récoltées dans un jardin en une semaine est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	0,1	0,5	0,3	0,1

Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 25 (*)

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > 2 \\ \frac{1}{C}(4 - t^2) & \text{si} \quad -2 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

1. Quelle valeur faut-il donner à C pour que f soit bien une densité ?
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$, $\mathbb{P}(|X| > \frac{3}{2})$.
4. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 26

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a(4 - x) & \text{si } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer a pour que f soit bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
3. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \geq 2)$; $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$.
4. Calculer, si elles existent, l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

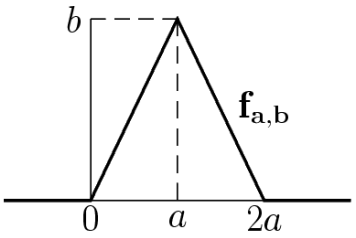
Exercice 27

Notons X une variable aléatoire suivant une distribution polynomiale dont la densité est :

$$f(x) = \begin{cases} a(x^3 - x^4) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminez a pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité.
2. Donner la fonction de répartition de X.
3. Calculez l'espérance $E(X)$.
4. Calculez la variance $Var(X)$.

Exercice 28



1. Déterminer b en fonction de a par un raisonnement géométrique de sorte que $f_{a,b}$ soit une densité. On fixe désormais b ainsi.
2. Déterminer une écriture analytique de f_a.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ si X a pour densité f_a.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 29

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est définie par :

$$\mathbb{P}(X = 2) = 1/2\,; \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/3\,; \quad \mathbb{P}(X = c) = 1/6$$

1. Déterminer la valeur de c sachant que $E(X) = 0$.
2. Calculer $\mathbb{V}(X)$

TD9
Probabilités - Lois usuelles discrètes

Exercice 30 (*)

Dans une collection de roches, 40% sont de type basalte et 60% sont de type granite. Cinq roches sont choisies au hasard à des fins d'analyses chimiques. On note X le nombre de roches de type basalte dans l'échantillon.

1. Préciser la loi de probabilité de X et ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne seulement des roches de même type.

Exercice 31 (*)

On sait que $0,2\%$ de la population présente une allergie à une vaccination V.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes allergiques sur 1000 personnes vaccinées.
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
3. Quelle est la probabilité pour que sur ces 1000 personnes vaccinées, on constate plus de quatre allergies ?

Exercice 32 (*)

On admet que la probabilité d'apparition d'une maladie M chez un individu est de 2%. Combien de personnes faut-il examiner pour que la probabilité de trouver au moins un malade soit supérieure à 95% ?

Exercice 33

Dans un centre de transfusion sanguine, on estime qu'une poche sur cent doit être retirée en raison de la présence d'anticorps indiquant différentes infections. Les poches sont regroupées par lot de vingt.

1. Quelle est la loi exacte du nombre de poches infectées par lot ? Indiquer son espérance et son écart-type.
2. Une recherche d'anticorps pour une poche a un coût C. Pour un nombre total de N poches, quel est le coût total de la recherche d'anticorps si elle est faite poche par poche ?
3. On considère plutôt la procédure suivante : on mélange un peu de sang de chacune des vingt poches d'un lot et on recherche les anticorps dans ce mélange. Si le test est positif, on reteste une à une chacune des poches du lot. Quelle est la probabilité que la recherche soit négative sur le mélange des poches ?
4. On considère à nouveau un total de N poches (on supposera que N est un multiple de 20). Quelle est le loi du nombre de lots qu'il faudra tester en intégralité ? Quelle est l'espérance du coût du dépistage sur les N poches avec cette procédure ? Cette procédure est-elle rentable ?

Exercice 34

On sait que le nombre de particules émises à partir d'une source radioactive suit une loi de Poisson avec une émission moyenne de deux particules par seconde.

1. Déterminer la probabilité qu'au moins une particule soit émise en trois secondes.
2. Quel serait le taux d'émission par seconde pour que la probabilité d'obtenir au moins une émission en trois secondes soit égale à 0.90 ?

Exercice 35

On enferme des rats dans une cage qu'ils peuvent ouvrir grâce à un mécanisme. Sous l'hypothèse que les rats ne tirent pas profit de leurs échecs successifs, chaque essai a une même probabilité p de réussir. Déterminer la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre d'essais pour que le rat se libère.

Exercice 36

Une expérience consiste à observer la germination de graines. Chaque graine a une probabilité de 0.8 de germer. On plante 10 graines.

1. Quelle est l'espérance du nombre de graines qui germent ?
2. Quelle est la variance du nombre de graines qui germent ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins une graine germe parmi les 10 graines plantées ?

Exercice 37

La fréquence de mutations génétiques dans une population de bactéries suit une loi de Poisson dont l'espérance est de 4 mutations par million de génomes. Quelle est la probabilité qu'exactement 2 mutations surviennent dans un échantillon de 1 million de génomes ?

Exercice 38

Une variété de souris présente des tumeurs spontanées avec un taux supposé parfaitement connu de 30%. Pour 20 de ces souris, on observe la présence de tumeurs et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de souris avec tumeurs.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des 20 souris ne présente de tumeurs ?

Exercice 39

Dans le cadre d'une étude portant sur le poids de naissance du nouveau-né dans une certaine population, 10 enfants ont été observés. On note Z la variable aléatoire correspondant au nombre de nouveaux-nés de moins de 2,5kg parmi ces 10 enfants. On sait que $E(Z) = 3$.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? On précisera la valeur du (ou des) paramètre(s).
2. Quelle est la probabilité que les 10 nouveaux-nés observés ait un poids de moins de 2,5kg ?

Exercice 40

On suppose que le génome humain est constitué de $3,2$ milliards de nucléotides. 1% des bases se trouvent dans des paires CpG, qui mutent plus facilement, avec un taux de mutation par génération de 8.10^{-8}. Le taux de mutations par génération hors dinucléotides CpG est $1,6.10^{-9}$.

1. Quelle est la loi exacte du nombre de mutations par génération hors dinucléotides CpG. Par quelle loi peut-on raisonnablement l'approcher ?
2. Même question pour les mutations concernant les dinucléotides CpG.
3. Quelle est la loi du nombre de mutations par génération ?

TD10
Probabilités - Lois usuelles continues (1/2)

Exercice 41 (*)

Dans un parc national, un guide propose quotidiennement l'observation de chamois venant s'abreuver dans un lac au coucher du soleil. Le temps d'attente du groupe avant l'arrivée des animaux (noté T et exprimé en heures) suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Calculer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(T > 0.5)$
2. $\mathbb{P}(0.2 < T < 0.6)$
3. $\mathbb{P}(T = 0.6)$

Exercice 42 (*)

Le temps d'attente X entre deux mutations spontanées dans l'ADN d'une cellule suit une distribution exponentielle avec un taux de 0.1 mutation par minute, ce qui signifie que le temps d'attente moyen entre deux mutations est de 10 minutes ($E(X) = 10$). Quelle est la probabilité qu'aucune mutation ne se produise au cours des 5 premières minutes ?

Exercice 43

On s'intéresse à le durée de vie T d'une cellule à l'état sain, c'est-à-dire avant qu'apparaisse une mutation la tuant ou la transformant en cellule cancéreuse. On définit la fonction de survie comme la fonction S donnée par

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t)$$

1. Au vu de ce que représente la variable aléatoire T, quelle loi de probabilité peut-on dans un premier temps envisager pour T ?
2. Que vaut la fonction de survie dans ce cas ?
3. Montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(T > t + \epsilon | T > t) = \mathbb{P}(T > \epsilon)$. Commenter.
4. Un organe est composé de N cellules. On note $T_1, \ldots, T_N$ les variables aléatoires représentant les temps de vie des cellules jusqu'à l'apparition d'une mutation. On suppose que ces N variables sont indépendantes et sont toutes distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que la première mutation d'une des cellules suffit pour déclencher une tumeur. On note X la durée de vie de l'organe. Déterminer la fonction de survie $S_X(t)$ de l'organe.

Exercice 44

La durée de vie en semaines d'une bactérie est modélisée par une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

1. Donner l'espérance et la variance de la durée de vie.
2. Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une bactérie dépasse une semaine ?

Exercice 45

On considère une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Rappeler la fonction de répartition de la variable aléatoire U.
2. On pose $V = -\ln U$. Déterminer la fonction de répartition de V.
3. Quelle est la loi de V ?

Exercice 46

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution normale centrée réduite : $X \sim N(0, 1)$.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X < 0.93) \quad \mathbb{P}(-1.4 < X < 0.2)$$

2. Déterminer d tel que :

$$\mathbb{P}(X < d) = 0.25$$

Exercice 47

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 4 et de variance 4. Déterminer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X > 6) \quad \mathbb{P}(1.7 \leq X \leq 2.82)$$

TD11
Probabilités - Lois usuelles continues (2/2)

Exercice 48 (*)

Dans le cadre d'une étude transcriptomique, on s'intéresse au niveau d'expression du gène HCP5. Après normalisation, la mesure d'expression X de ce gène est telle que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Pour un individu choisi au hasard, quelle est la probabilité pour que le niveau d'expression normalisé du gène HCP5 soit inférieur à -0.44 ?
2. Déterminer la valeur s tel que $\mathbb{P}(X \leq s) = 0.1$.

Exercice 49 (*)

On suppose que la glycémie est distribuée normalement dans la population, avec une moyenne de 1 g/l et un écart-type de 0,03 g/l. On mesure la glycémie chez un individu.

1. Calculer la probabilité pour que sa glycémie soit :
   (a) inférieure à 1,06
   (b) supérieure à 0,9985
   (c) comprise entre 0,94 et 1,08
2. On mesure la glycémie chez 1 000 individus. Donner l'espérance du nombre d'individus dont la glycémie est supérieure à 0,99.
3. Quelle est la probabilité d'observer moins de 200 individus (sur 1 000) avec une glycémie supérieure à 0.99 ?

Exercice 50

Le taux de cholestérol d'un individu d'une population P suit une distribution normale telle que la probabilité d'avoir un taux inférieur à 165 cg/l est 0.56 et la probabilité d'avoir un taux supérieur à 180 cg/l est 0.1. Déterminer l'espérance et la variance du taux de cholestérol dans cette population.

Exercice 51

On note p la probabilité d'observer un phénotype donné sur un individu issu d'un certain croisement. Sous l'hypothèse $p = 9/16$, calculer la probabilité d'observer moins de 220 individus (220 inclu) possédant le phénotype sur un échantillon de 384 descendants.

Exercice 52

On lance un dé 80 fois. Quelle est la probabilité que la somme totale des nombres obtenus dépasse 301 ?

Indication : On rappelle que si X est une variable aléatoire suivant une distribution uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, 2, ..., k\}$, alors $E(X) = \frac{k+1}{2}$ et $V(X) = \frac{k^2-1}{12}$.

Exercice 53

La quantité d'air (en litres) rejetée par un sujet sain lors d'une expiration i forcée, est une variable aléatoire qui est supposée normale $N(\mu = 1,5, \sigma^2 = 2)$. La capacité respiratoire d'un sujet est mesurée par la quantité d'air Y rejetée lors de deux expirations forcées successives espacée de 2 minutes ($Y = X_1 + X_2$). On suppose que les deux résultats sont indépendants.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Quelle est la probabilité que la capacité respiratoire d'un sujet sain dépasse 4 litres ?

Exercice 54

Dans une certaine population, un test biologique X suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et de variance $\sigma^2 = 2500$.

1. Quelle est la valeur u telle que la probabilité d'avoir un résultat supérieur à u soit de 5% ?
2. L'intervalle des résultats considérés comme normaux est $[52, 232]$. Quelle est la probabilité qu'un individu ait un résultat normal ?

Exercice 55

La taille X des individus dans une population de poissons suit une distribution normale d'espérance 30 cm et d'écart-type 5 cm, de sorte que la variable aléatoire $Y = \frac{X-30}{5}$ suit une loi normale centrée réduite. Quelle est la probabilité qu'un poisson choisi au hasard mesure plus de 35 cm ?

Exercice 56

Certains diabètes de type II se caractérisent par un taux élevé de glycémie et un taux trop bas de magnésium. On considère que des patients sains ont une glycémie qui suit une loi normale d'espérance 5 mmol/L et d'écart-type 1 mmol/L et un taux de magnésium qui suit une loi normale d'éspérance 50 mg/L et d'écart-type 5 mg/L. On cherche à mettre en place un test médical permettant de détecter les personnes souffrant de ce type de diabète. On suppose que la glycémie chez les patients malades suit une loi normale d'espérance 8 mmol/L et d'écart-type 1 mmol/L. On suppose de plus que cette maladie touche 5% de la population.

1. Quel est le seuil S tel que 10% des patients sains ont une glycémie supérieure à S ? Quelle est la probabilité qu'une personne malade ait une glycémie supérieure à S ?
2. Un patient sain n'étant pas à jeun augmente artificiellement sa glycémie. Cette augmentation suit une loi normale d'espérance 1.5 mmol/L et d'écart-type 0.5 mmol/L. Cette augmentation est supposée indépendante de la glycémie à jeun. Quelle est la loi de la glycémie pour un patient sain non à jeun ? Quelle est alors sa probabilité d'avoir un taux supérieur à S ?
3. La première prise de sang d'un patient à jeun a donné une glycémie supérieure à S. Sachant cela, quelle est la probabilité que le patient soit malade ? sain ? Son médecin décide alors d'effectuer une deuxième prise de sang. Quelle est la probabilité que la glycémie soit à nouveau supérieure à S ?
4. On décide de déclarer malade une personne ayant une glycémie supérieure à S et un taux de magnésium inférieur à 42 mg/L. Quelle est la probabilité pour une personne saine d'être déclarée malade si on suppose la glycémie et le taux de magnésium indépendants ?