Analyse et Probabilités
-
Probabilités

Cyril Dalmasso
cyril.dalmasso@univ-evry.fr

Université Evry Paris-Saclay

2026-2027

1. Probabilité, indépendance, conditionnement
2. Variables aléatoires réelles
3. Résumés numériques d'une loi de probabilité
4. Lois usuelles discrètes
5. Lois usuelles continues

1. Probabilité, indépendance, conditionnement
   - Expérience aléatoire - événement
   - Probabilité
   - Probabilité conditionnelle - Indépendance
   - Exercices
2. Variables aléatoires réelles
3. Résumés numériques d'une loi de probabilité
4. Lois usuelles discrètes
5. Lois usuelles continues

Expérience aléatoire, espace fondamental

Définitions

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'issue ne peut être prédite avec certitude.
- On appelle **espace fondamental** (ou **univers**) l'ensemble de toutes les issues possibles. On le note Ω.

Evénements

Définitions

- Un **événement** A est un sous-ensemble de l'espace fondamental (c'est à dire : $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$).
- Un **événement élémentaire** est l'un des résultats observables à l'issue de l'expérience aléatoire.
- Un **événement composé** est un événement dont la réalisation peut se produire à partir de plusieurs événements élémentaires.

Relations entre ensembles et événements

Notation	*Signification/Ensemble*	*Interprétation/Evénement*
Ω		**événement certain**
$\varnothing$	ensemble vide	**événement impossible**
$\overline{A}$ (ou A^c)	complémentaire de A dans Ω	**événement contraire** de A ($\overline{A}$ est réalisé si et seulement si A ne l'est pas)
$A \cap B$	intersection entre A et B	A et B sont tous les deux réalisés
$A \cup B$	réunion de A et B	A est réalisé ou B est réalisé
$A \backslash B$	A moins B (A privé de B)	A est réalisé mais B ne l'est pas
$A \cap B = \varnothing$	A et B disjoints	A et B sont deux **événements incompatibles**
$A \subset B$	A inclu dans B	A implique B (si A est réalisé, alors B l'est aussi)

Relations entre ensembles et événements

Remarque

Les relations entre événements peuvent être représentées par des diagrammes de Venn.

Algèbre d'ensembles - rappels

- Idempotence : $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$
- Commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
- Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- Distributivité : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Identités : $A \cup \varnothing = A$; $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap \Omega = A$
- Complémentarité : $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $\overline{(\overline{A})} = A$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \varnothing$
- Lois de Morgan : $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1. Probabilité, indépendance, conditionnement
   - Expérience aléatoire - événement
   - Probabilité
   - Probabilité conditionnelle - Indépendance
   - Exercices
2. Variables aléatoires réelles
3. Résumés numériques d'une loi de probabilité
4. Lois usuelles discrètes
5. Lois usuelles continues

Probabilité

Une probabilité est une mesure numérique de la vraisemblance d'un événement.

Probabilité

Définition classique (Laplace-1819)

Si Ω contient un nombre fini d'éléments, la probabilité d'un événement A peut être définie par le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre total de cas possibles (supposés 'équiprobables') :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Problème

- Cette définition suppose tous les cas équiprobables.
- Ne s'applique que si le nombre de cas possibles est fini.

Probabilité

Définition en fréquence

Pour une expérience qui peut être répétée, la probabilité d'un événement A est la fréquence relative observée de l'événement A pour un grand nombre de répétitions :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{card(A)}{n}$$

Problème

Il est impossible de répéter une expérience une infinité de fois.

Probabilité

Définition axiomatique (Kolmogorov-1933)

Une **probabilité** est une application $\mathbb{P} : \Omega \to [0, 1]$ telle que :

- pour tout $A \in \Omega$, on a $\mathbb{P}(A) \geq 0$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarque

Une probabilité est une mesure.

Définition

On appelle **espace probabilisé** le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

Probabilité

Propriétés élémentaires

i) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

ii) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

iii) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

iv) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

v) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Remarque

$\mathbb{P}(A) = 0$ ne signifie pas que A est un événement impossible.

Dénombrement - rappels

Définition

On appelle **cardinal** d'un ensemble E le nombre d'éléments de E.
On note $card(E)$, $|E|$ ou $\#E$.

Dénombrement - rappels

- Tirage **ordonné** de p éléments parmi n **sans** remise :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Tirage **non ordonné** de p éléments parmi n **sans** remise :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Tirage **ordonné** de p éléments parmi n **avec** remise :

$$n^p$$

- Tirage **non ordonné** de p éléments parmi n **avec** remise :

impossible

1. Probabilité, indépendance, conditionnement
   - Expérience aléatoire - événement
   - Probabilité
   - Probabilité conditionnelle - Indépendance
   - Exercices
2. Variables aléatoires réelles
3. Résumés numériques d'une loi de probabilité
4. Lois usuelles discrètes
5. Lois usuelles continues

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle** de A par rapport à B, notée $\mathbb{P}(A|B)$ ou $P_B(A)$ (probabilité de A sachant B), est donnée par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Formule des probabilités totales

Définition

Soit E un ensemble. $A_1, A_2, ..., A_n$ constituent une partition de E si :

- $\forall i \in \{1, ..., n\}; A_i \neq \emptyset$
- $\forall i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition de Ω

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + ... + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)\end{aligned}$$

Formule de Bayes

Formule de Bayes

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$

Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

On note $A \perp\!\!\!\perp B$

Remarques

- Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
- Attention à ne pas confondre indépendance et incompatibilité.

1. Probabilité, indépendance, conditionnement
   - Expérience aléatoire - événement
   - Probabilité
   - Probabilité conditionnelle - Indépendance
   - Exercices
2. Variables aléatoires réelles
3. Résumés numériques d'une loi de probabilité
4. Lois usuelles discrètes
5. Lois usuelles continues

Exercices

Soient A et B deux événements. Montrer que :

i) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

ii) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

iii) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

iv) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

v) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Exercices

On dispose de cinq antibiotiques efficaces pour traiter une maladie infectieuse. On a vérifié en laboratoire que les cinq produits sont également actifs in vitro sur le microbe, mais on ne peut pas donner plus de deux antibiotiques à la fois. Combien y a-t-il de traitements possibles en associant deux antibiotiques ?

Exercices

Dans une population constituée de 40% d'hommes et de 60% de femmes, 14% des hommes sont daltoniens alors que seulement 6% des femmes le sont. Une personne est choisie au hasard dans la population. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit daltonienne ?

Exercices

Un laboratoire pharmaceutique vend un test avec la notice suivante : si vous êtes malade, alors le test est positif avec une probabilité 0.98, si vous êtes sain, alors le test est positif avec probabilité 0.03. Sachant que la proportion de malades dans la population est de 1 pour 1000, calculer la probabilité d'être un sujet sain lorsque le test est positif. Calculer la probabilité d'être malade lorsque le test est négatif. Commentaire.

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles
- Définitions
- Loi de probabilité
- Fonction de répartition
- Exercices

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues

Variables aléatoires réelles

Définitions

- Une **variable aléatoire réelle** X est une application qui à tout élément ω de Ω associe un nombre réel x

$$\begin{array}{rcl} X & : & \Omega \to \mathbb{R} \\ & & \omega \mapsto x \end{array}$$

- On appelle **domaine de variation** (ou **support**) de X l'ensemble $D_x \subseteq \mathbb{R}$ des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.

Remarques

- On note généralement X la variable aléatoire et x sa réalisation (c'est à dire $x = X(\omega_i)$ où $\omega_i \in \Omega$).

Variables aléatoires réelles

Définition

- Une variable aléatoire **discrète** est une variable aléatoire dont le domaine de variation contient un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs.
- Une variable aléatoire **continue** est une variable aléatoire dont le domaine de variation contient une infinité non dénombrable de valeurs.

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles
- Définitions
- Loi de probabilité
- Fonction de répartition
- Exercices

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues

Loi de probabilité

Définitions

- Soit X une variable aléatoire **discrète** telle que $\Omega_X = x_1, ..., x_N$. La loi de probabilité de X est définie/caractérisée par sa **fonction de probabilité** qui donne, pour tout $i \in 1, ..., N$

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$$

- Soit X une variable aléatoire **continue**. On appelle **densité** de probabilité la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = lim_{\delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(X \in [x; x + \delta])}{\delta}$$

Remarque : Pour δ proche de 0, $f(x)dx \approx \mathbb{P}(X \in [x; x + \delta])$

Propriétés

Cas discret	Cas continu
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \geq 0 \ \forall x_i \in \Omega$ $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$	$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
$\forall A \subset \Omega :$ $\mathbb{P}(A) = \sum_{i:x_i \in A} p_i$	$\forall [a,b] \subset \mathbb{R} :$ $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx$

Loi de probabilité

Définitions

- Soit X une variable aléatoire **discrète** telle que $\Omega_X = x_1, ..., x_N$. La loi de probabilité de X est définie/caractérisée par sa **fonction de probabilité** qui donne, pour tout $i \in 1, ..., N$

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$$

- Soit X une variable aléatoire **continue**. On appelle **densité** de probabilité la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = lim_{\delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(X \in [x; x + \delta])}{\delta}$$

Remarque : Pour δ proche de 0, $f(x)dx \approx \mathbb{P}(X \in [x; x + \delta])$

Propriétés

Cas discret	Cas continu
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \geq 0 \ \forall x_i \in \Omega$ $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$	$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
$\forall A \subset \Omega :$ $\mathbb{P}(A) = \sum_{i:x_i \in A} p_i$	$\forall [a,b] \subset \mathbb{R} :$ $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx$

Propriétés

Remarque

- $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Toute fonction vérifiant ces deux propriétés est une densité de probabilité.

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles
- Définitions
- Loi de probabilité
- Fonction de répartition
- Exercices

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues

Fonction de répartition

Définition

On appelle **fonction de répartition** la fonction F définie par :

$$\begin{array}{rcl} F & : & D_X \longrightarrow [0,1] \\ & & x_i \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x_i) \end{array}$$

Fonction de répartition

Propriétés

i) $F(x) \in [0,1]$

ii) F est une fonction croissante

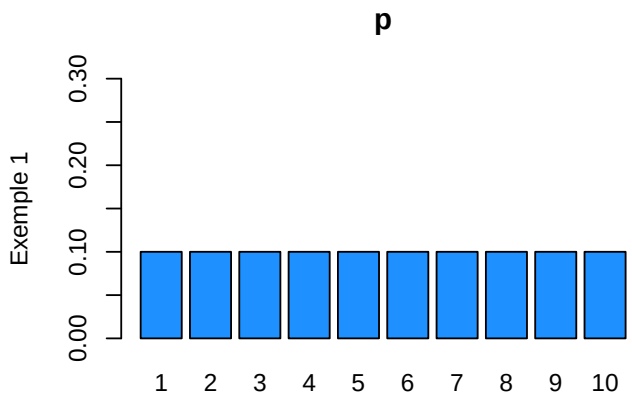
iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

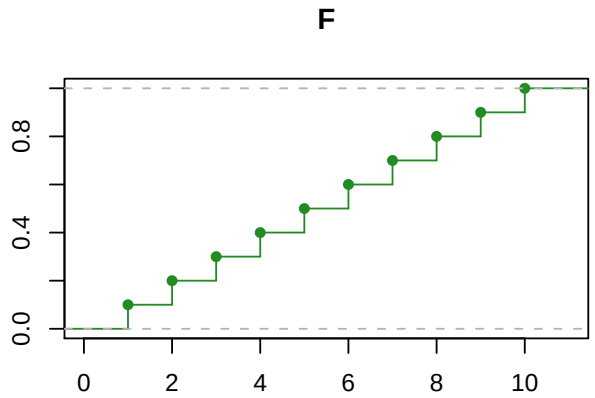
iv) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

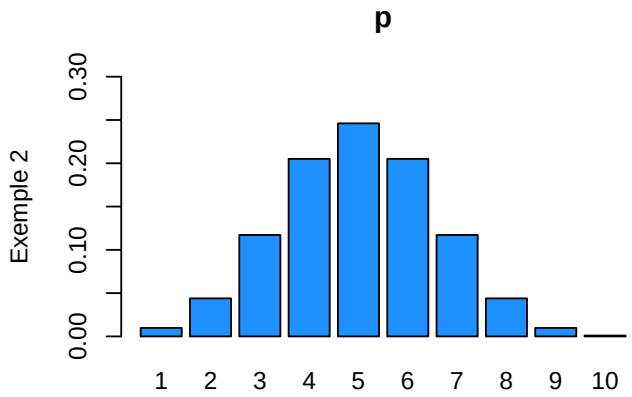
v)
- Pour une variable aléatoire discrète, F est une fonction en escaliers
- Pour une variable aléatoire continue, F est une fonction continue

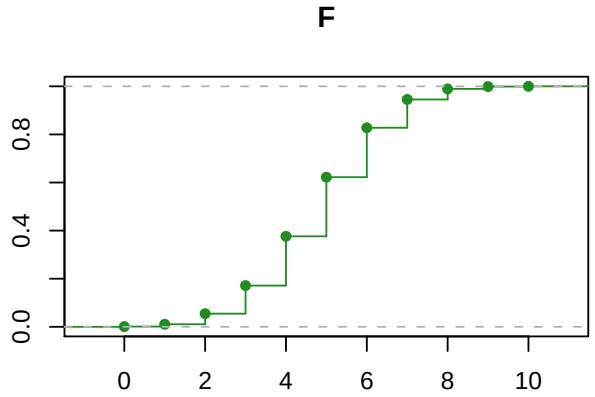
Fonction de répartition

Représentation graphique - lois discrètes



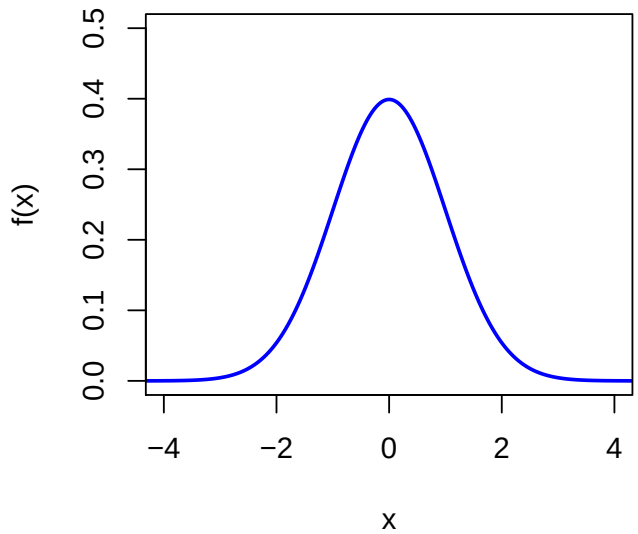


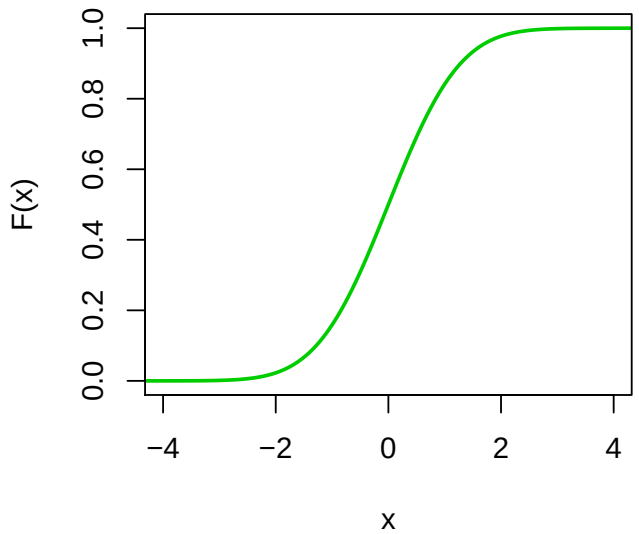




Fonction de répartition

Représentation graphique - lois continues





Fonction de répartition

Lien entre fonction de répartition et fonction de probabilité - loi discrète

- $F(x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(x_i)$
- $\mathbb{P}(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Fonction de répartition

Lien entre fonction de répartition et densité - loi continue

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Leftrightarrow f(x) = F'(x)$
- Pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

  $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Remarque

Il est équivalent de spécifier $f(x)$ ou $F(x)$

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles
- Définitions
- Loi de probabilité
- Fonction de répartition
- Exercices

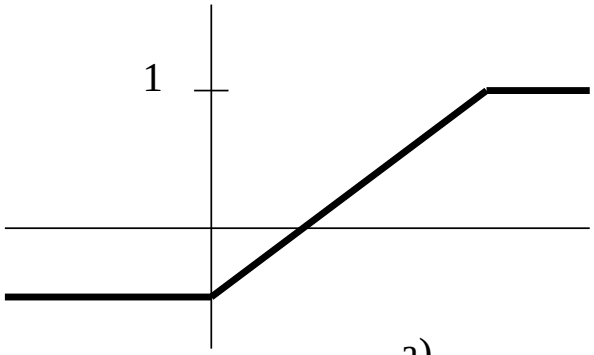
3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

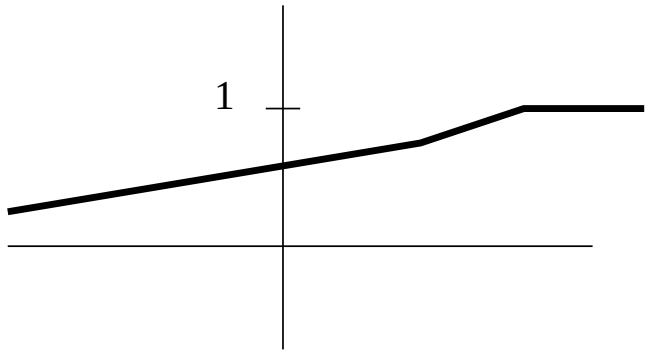
5 Lois usuelles continues

Exercices

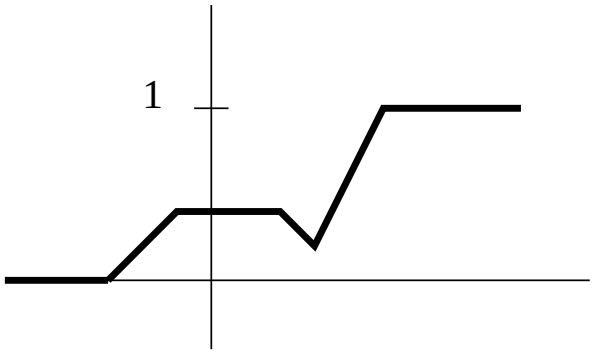
Dans chacun des cas suivants, dire si la courbe dessinée peut être la fonction de répartition d'une variable aléatoire.



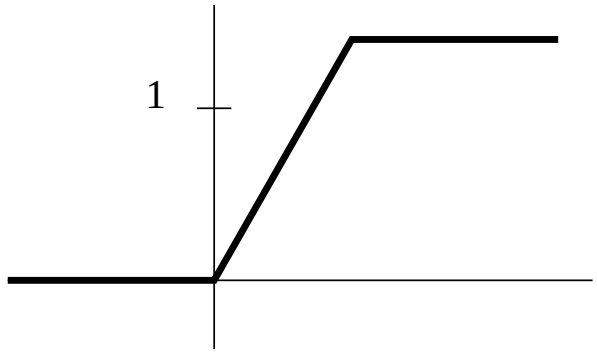
a)



b)



c)



d)

Exercices

La probabilité qu'un atome d'une substance radioactive se désintègre en un temps inférieur à t $(t \geq 0)$ est donnée par :

$$1 - e^{-at}$$

où a est une constante caractéristique de la substance. Déterminer, en fonction de a, la densité de la variable aléatoire T correspondant à la durée de vie de cet atome.

Exercices

On s'intéresse à l'évolution de la population d'élans via la population des femelles. On note X la variable aléatoire désignant le nombre d'enfants femelles d'un élan femelle. La loi de X est alors donnée par :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$0,3$	a	$0,3$	$0,1$	$0,1$

1. Calculer la valeur de a.
2. Tracer la fonction de répartition de cette loi.

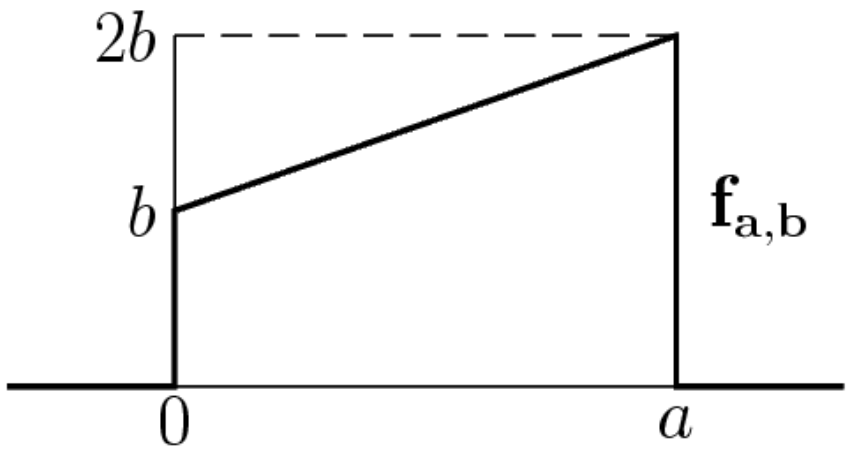
Exercices

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de c pour que f soit une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F liée à la densité f. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

Exercices



1. Déterminer b en fonction de a par un raisonnement géométrique de sorte que $f_{a,b}$ soit une densité. On fixe désormais b ainsi.
2. Déterminer une écriture analytique de f_a.

Exercices

On considère une variable aléatoire continue X dont la densité, définie par morceaux, est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ (x+1)^2/4 & -1 \leq x \leq 1, \\ 1/6 & 1 < x \leq 3, \\ 0 & x > 3. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 2)$.

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité
- Espérance
- Variance
- Quantiles
- Exercices

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues

Espérance

Définition

L'**espérance** $E(X)$ d'une variable aléatoire X est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i \qquad \text{(cas discret)}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad \text{(cas continu)}$$

Remarques

- L'espérance ne fait pas nécessairement partie de D_x
- L'espérance n'est pas toujours définie

Espérance

Propriété

Soit h une fonction telle que $h(x)$ est définie.

$$E(h(X)) = \sum_{i=1}^{N} h(x_i)p_i \qquad \text{(cas discret)}$$

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx \qquad \text{(cas continu)}$$

Espérance

Propriétés (linéarité de l'espérance)

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Attention : $E(XY) \neq E(X)E(Y)$

Autres propriétés

- Si la courbe de $f(x)$ est symétrique par rapport à c, alors $E(X) = m = c$
- Si $f(x)$ est une fonction paire (c'est à dire si sa courbe est symétrique par rapport à 0, alors $E(X) = m = 0$ (espérance = médiane)

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité
- Espérance
- Variance
- Quantiles
- Exercices

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues

Variance et écart-type

Définitions

- La **variance** $Var(X)$ d'une variable aléatoire X est définie par :

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

- L'**écart-type** est défini par

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Variance et écart-type

Théorème (de König-Huygens)

Pour toute variable aléatoire réelle X, on a :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriétés

- Comme l'espérance, la variance n'existe pas toujours
- $Var(X) \geq 0$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité
- Espérance
- Variance
- Quantiles
- Exercices

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues

Médiane

Définition

La **médiane** d'une variable aléatoire est une mesure de la centralité de cette variable. Il s'agit de la valeur m telle que :

$$\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$$

Remarque

Dans le cas discret, la médiane ne peut être identifiée que si l'une des valeurs de la fonction $F(x)$ est égale à $1/2$.

Quantiles

Définition

Le **p-quantile** (parfois appelé **p-fractile**) d'une variable aléatoire X est la valeur q_p telle que :

$$\mathbb{P}(X \leq q_p) = p; p \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow q_p = F^{-1}(p)$$

Quantiles

Quantiles particuliers

- La **médiane** (définie précédemment) n'est rien d'autre que le 0,5 quantile $q_{0.5}$ coupant D_X en deux intervalles tels que la probabilité d'être dans chacun d'eux vaut $1/2$.
- Les **quartiles** $q_{0.25}, q_{0.5}, q_{0.75}$ coupent D_X en quatre intervalles tels que la probabilité d'être dans chacun d'eux vaut $1/4$. Les valeurs $q_{0.25}, q_{0.5}$ et $q_{0.75}$ sont appelées premier quartile, deuxième quartile (ou médiane) et troisième quartile (respectivement).

Quantiles

Quantiles particuliers

- Les **déciles** $q_{0.1}, q_{0.2}, ..., q_{0.9}$ coupent D_X en dix intervalles tels que la probabilité d'être dans chacun d'eux vaut $1/10$. Les valeurs $q_{0.1}, q_{0.2}, ..., q_{0.9}$ sont appelées premier décile, deuxième décile, ..., neuvième décile (respectivement).
- Les **centiles** $q_{0.01}, q_{0.02}, ..., q_{0.99}$ coupent D_X en cent intervalles tels que la probabilité d'être dans chacun d'eux vaut $1/100$. Les valeurs $q_{0.01}, q_{0.02}, ..., q_{0.99}$ sont appelées premier centile, deuxième centile, ..., quatre-vingt-dix-neuvième centile (respectivement).

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité
- Espérance
- Variance
- Quantiles
- Exercices

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues

Exercices

Pour une évaluation de contrôle continu, un enseignant prépare un QCM comportant 20 questions de difficultés équivalentes. Pour chaque question, 5 réponses sont proposées dont une seule est correcte (une seule réponse étant autorisée par question). Pour la correction, il envisage 3 barêmes différents :

- Barême 1 : 1 point par bonne réponse, 0 point par mauvaise réponse.
- Barême 2 : 1 point par bonne réponse, -1 point par mauvaise réponse.
- Barême 3 : 1 point par bonne réponse, -0.25 point par mauvaise réponse.

Un.e étudiant.e n'ayant rien suivi du semestre décide de répondre au hasard à toutes les questions sans lire les énoncés.

1. Sans aucun calcul, donner la note la plus juste.
2. Notons N_i la note obtenue à la question i ($i = 1, ..., 20$). Pour chacun des 3 barêmes proposés, déterminer la loi de probabilité de N_i et calculer l'espérance de cette variable aléatoire. En déduire l'éspérance de la note finale obtenue à cette évaluation.
3. Lequel des 3 barêmes est le plus juste ?

Exercices

On s'intéresse à l'évolution de la population d'élans via la population des femelles. On note X la variable aléatoire désignant le nombre d'enfants femelles d'un élan femelle. La loi de X est alors donnée par :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$0,3$	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,1$

1. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de cette loi.
2. En traversant un bras de mer, un groupe d'élans a atteint une île vide de prédateurs. Au vu de l'espérance de X, quelle évolution de la population va-t-on observer ?

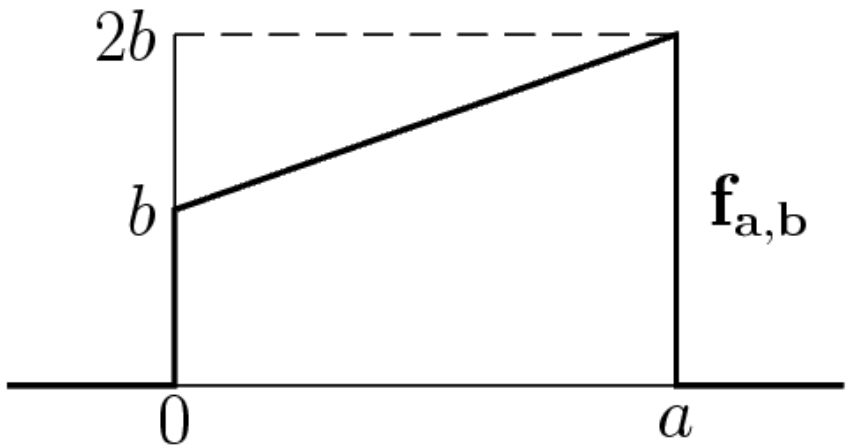
Exercices

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de c pour que f soit une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F liée à la densité f. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
3. Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X.

Exercices



1. Déterminer b en fonction de a par un raisonnement géométrique de sorte que $f_{a,b}$ soit une densité. On fixe désormais b ainsi.
2. Déterminer une écriture analytique de f_a.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ si X a pour densité f_a.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercices

Une variable aléatoire a pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer a et b si l'espérance de cette densité est égale à $2/3$.

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes
- Loi uniforme discrète
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Exercices

5 Lois usuelles continues

Loi uniforme discrète

Définition

La loi uniforme discrète sur $\{1, ..., n\}$ est la loi d'une variable aléatoire X qui peut prendre les valeurs $1, ..., n$ de manière équiprobable.

Notation

$$X \sim U(\{1, ..., n\})$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \; ; \; \forall k \in \{1, ..., n\}$$

Loi uniforme discrète

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

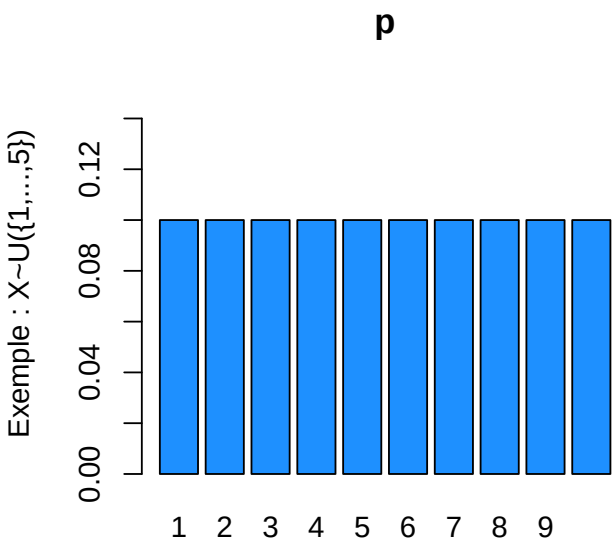
$$Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

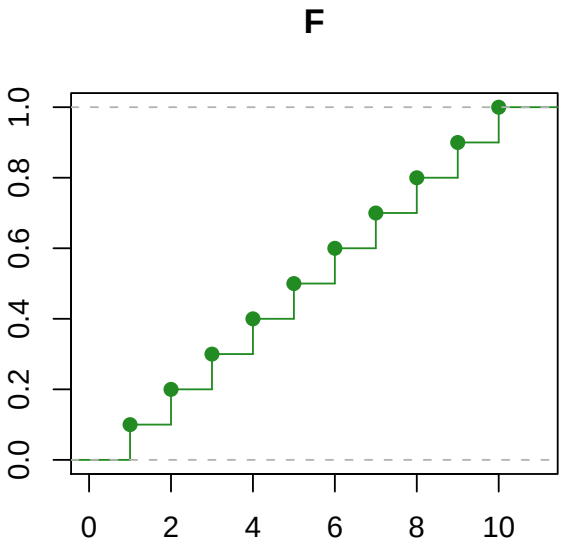
Exemple type

Lancé d'un dé équilibré.

Loi uniforme discrète

Graphiques





1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes
- Loi uniforme discrète
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Exercices

5 Lois usuelles continues

Loi de Bernoulli

Définition

La loi de Bernoulli de paramètre p est la loi d'une variable aléatoire discrète X qui ne prend que **deux valeurs** : la valeur 1 avec probabilité p et la valeur 0 avec probabilité $1-p$. L'expérience associée est appelé une **épreuve de Bernoulli**.

Notation

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi de Bernoulli

Espérance et variance

$$E(X) = p$$

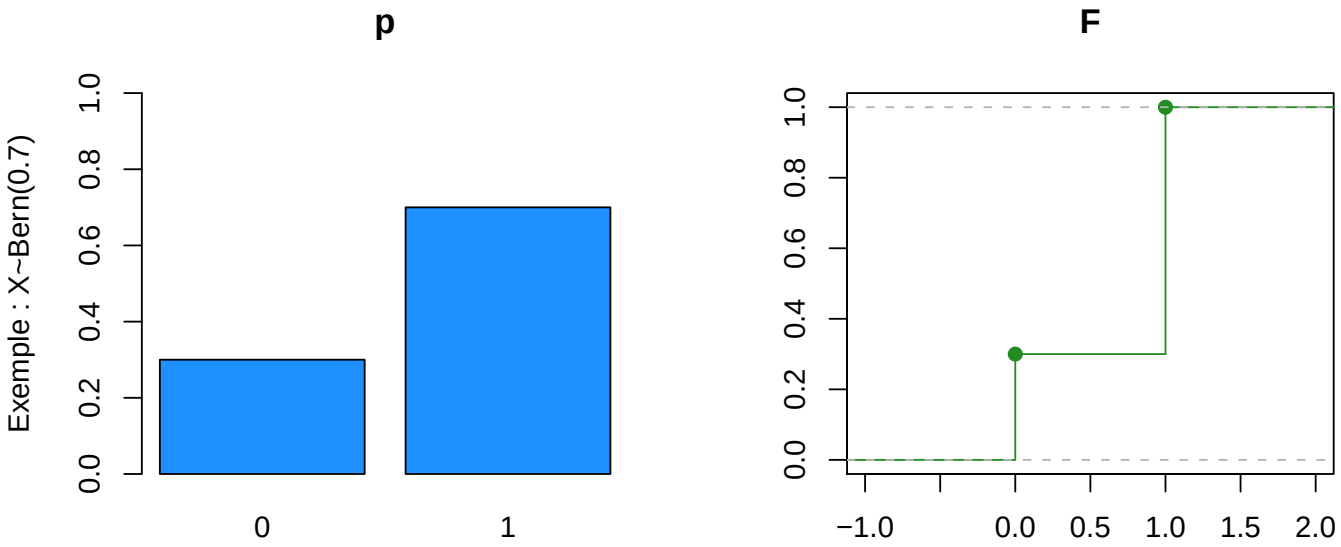
$$Var(X) = p(1-p)$$

Exemple type

Pile ou face

Loi de Bernoulli

Graphiques



1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes
- Loi uniforme discrète
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Exercices

5 Lois usuelles continues

Loi binomiale

Définition

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de la somme X de n variables aléatoires X_i indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Notation

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)} \; ; \; k = 1, ..., n$$

Loi binomiale

Espérance et variance

$$E(X) = np$$

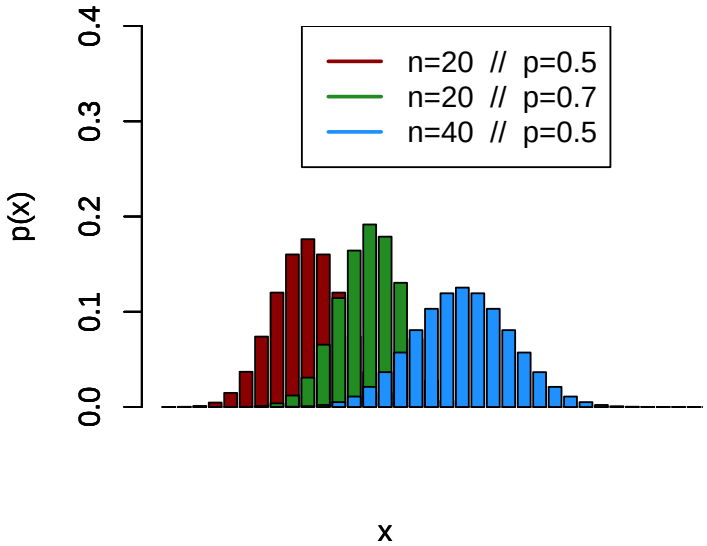
$$Var(X) = np(1-p)$$

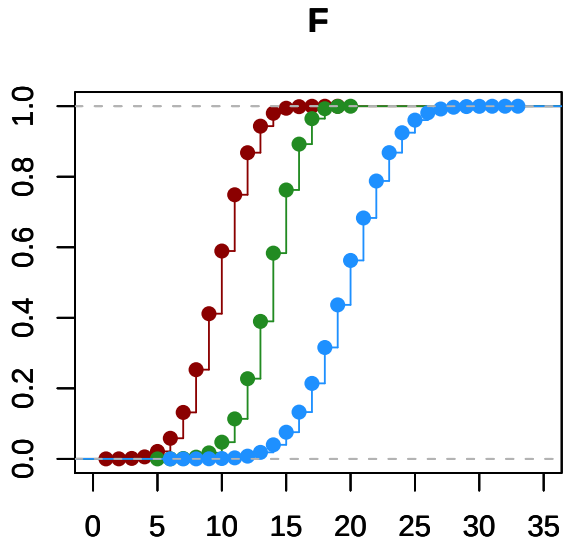
Exemple type

Comptage du nombre de succès sur n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Loi binomiale

Graphiques





1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes
- Loi uniforme discrète
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Exercices

5 Lois usuelles continues

Loi de Poisson

Définition

La loi de Poisson (parfois appelée loi des événements rares) de paramètre $\lambda > 0$ est définie par la fonction de probablité qui suit.

Notation

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \; ; \; k = 1, ..., n$$

Loi de Poisson

Espérance et variance

$$E(X) = \lambda$$

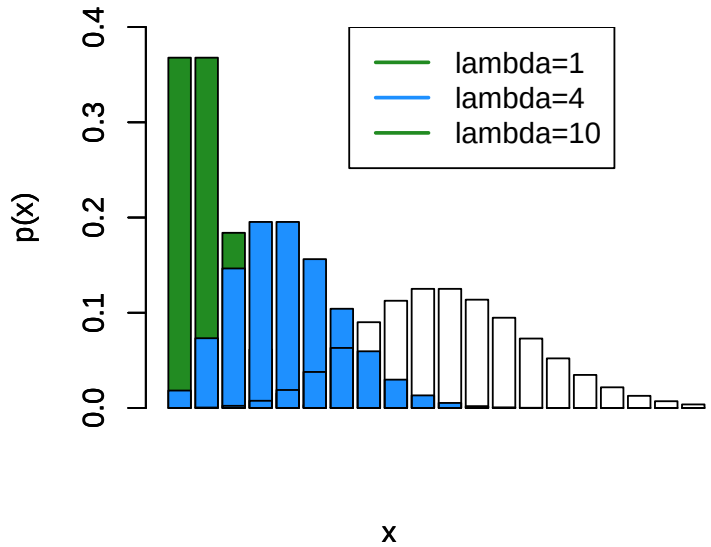
$$Var(X) = \lambda$$

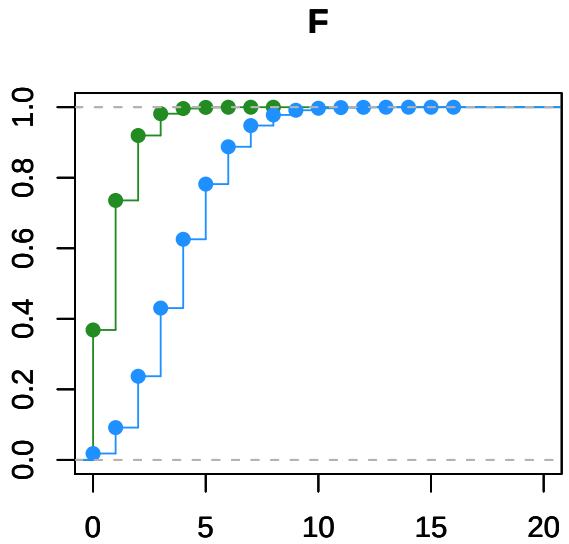
Exemple type

Comptage du nombre d'événements au cours d'un intervalle de temps.

Loi de Poisson

Graphiques





Loi de Poisson

Théorème 1

Lorsque n tend vers l'infini et que, simultanément, p_n devient petit de sorte que $lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, la loi binomiale de paramètres n et p_n converge vers la loi de Poisson de paramètre λ.
En pratique, l'approximation peut être faite lorsque $n > 30$ et $np < 5$ ou $n > 50$ et $p < 0.1$.

Théorème 2

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, alors

$$Y = X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes
- Loi uniforme discrète
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Exercices

5 Lois usuelles continues

Loi géométrique

Définition

La loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$ est la loi de la variable aléatoire Y qui compte le nombre de répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli (de paramètre p) jusqu'au premier succès.

Notation

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \; ; \; k = 1, ..., n$$

Loi géométrique

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemple type

Comptage du nombre d'expériences nécessaires pour obtenir un premier succès en répétant une épreuve de Bernoulli.

Distributions usuelles

Lois discrètes

Lois de probabilité discrètes	Fct de probabilité	$E(X)$	$Var(X)$	Genèse
Uniforme $X \sim U(\{1, 2, \ldots, n\})$ $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	-
Bernoulli $X \sim B(p)$ $0 \leq p \leq 1$	$p^x(1-p)^{1-x}$ si $x = 0, 1$	p	$p(1-p)$	Lancer d'une pèce de monnaie avec $\mathbb{P}(pile) = p$
Binomiale $X \sim B(n, p)$ n entier > 0, $0 \leq p \leq 1$	$C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ si x=0,1,...,n	np	$np(1-p)$	Loi de la somme de n v.a. indépendantes de loi $B(p)$
Poisson $X \sim P(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ si $x = 0, 1, 2, \ldots$	λ	λ	Limite de la loi binomiale lorsque $n \to \infty$, $np_n \to \lambda > 0$ et $p_n \to 0$
Géométrique $X \sim G(p)$ $0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{x-1}$ si $x = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Nombre de lancers nécessaire pour l'obtention du premier *pile* avec $\mathbb{P}(pile) = p$
Binomiale négative $X \sim BN(n, p)$ $0 \leq p \leq 1$	$C_{x-1}^{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$ si $x = n, n+1, \ldots$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p}$	Loi de la somme de n v.a. indépendantes de loi $G(p)$

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes
- Loi uniforme discrète
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Exercices

5 Lois usuelles continues

Exercices

Une greffe réalisée sur une souris a une probabilité de succès de $p = 0.2$. La variable aléatoire X associée à cette expérience prend la valeur 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Donner son espérance et sa variance.

Exercices

On considère deux races pures d'une même espèce de plantes diploïdes, l'une à fleurs rouges, l'autre à fleurs blanches. La coloration de la fleur est déterminée par un couple d'allèles. On effectue un croisement pour obtenir la génération F_1, la génération F_2 étant obtenue par autofécondation.
Les plantes observées en F_1 sont rouges.
Déterminer la loi de probabilité de X, nombre de plantes à fleurs rouges que l'on peut observer en F_2 sur cinq plantes.

Exercices

Pour chacune des deux situations suivantes, dire si l'expérience peut être modélisée par une loi binomiale et répondre à la question posée :

1. Une branche présente 10 fleurs blanches ou roses réparti es au hasard. On compte 2 fleurs blanches et 8 fleurs roses. On cueille su ccessivement et au hasard 3 fleurs ; quelle est la probabilité d'avoir 2 fleurs blanches ?
2. Sous l'hypothèse que 2 % des individus d'une population sont gauchers, calculer la probabilité que parmi 100 personnes, 3 au plus soient gauchères.

Exercices

Sachant que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10h et 11h est de 1,8 par minute, et que le nombre X d'appels reçus par minute est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson, calculer la probabilité pour qu'entre 10h53 et 10h54, il y ait :

1. aucun appel
2. un appel
3. deux appels
4. au moins deux appels

Exercices

Au cours d'une expérience en laboratoire, la probabilité p qu'une mutation se produise sur le chromosome d'une cellule d'une bactérie A est très faible ($p \approx 10^{-7}$). On soumet 10^8 cellules de A à cette expérience. On suppose que les phénomènes de mutation sur les différentes cellules sont indépendants. Quelle est la probabilité d'observer 4 mutations ?

Exercices

On suppose qu'une population de saumons sauvages été au contact de saumons génétiquement modifiés et que le gène modifié est pour l'instant présent chez un saumon sauvage sur 50. Des chercheurs voulant démontrer le phénomène de contamination capturent 150 saumons et séquencent leurs génomes 'a la recherche du gène modifié. On note X la variable aléatoire désignant le nombre de saumons porteurs de ce gène dans l'échantillon.

1. Quelle est la loi exacte de X ?
2. Par quelle loi peut-on l'approcher ?
3. Quelle est alors la probabilité de n'avoir pêché aucun saumon porteur du gène modifié ? d'en avoir pêché 3 ou plus ?

Exercices

On joue avec deux dés équilibrés à six faces numérotés de 1 à 6 (dés non pipés). On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier. Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

1. Etablir la loi de probbilité de X.
2. Calculer son espérance et sa variance.

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale
- Satellites de la loi normale
- Exercices

Fonction indicatrice

Définition

Soit A un ensemble. La fonction définie par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est appelée fonction indicatrice (de l'ensemble A)

Loi uniforme

Définition

Une variable aléatoire réelle X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ si sa densité de probabilité f est définie par :

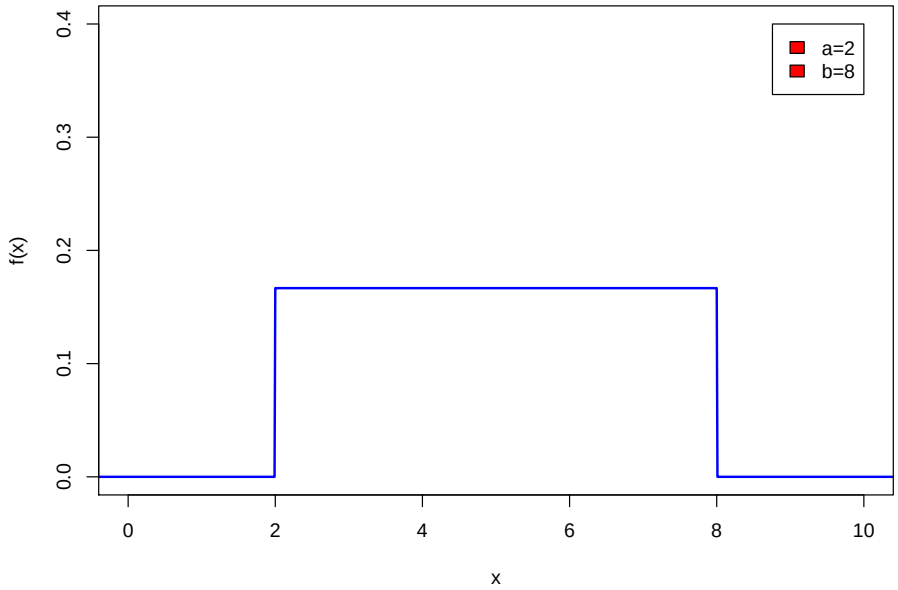
$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$$

Notation

$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

Loi uniforme

Représentation graphique



Loi uniforme

Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si x>b} \end{cases}$$

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale
- Satellites de la loi normale
- Exercices

Loi exponentielle

Définition

Une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) si sa densité de probabilité f est définie par :

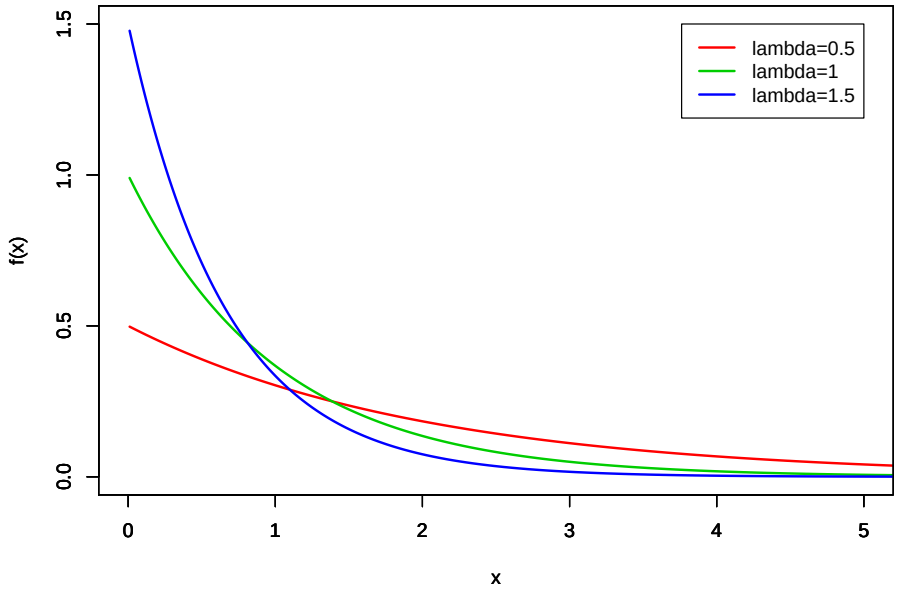
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \times 1_{\mathbb{R}+}(x)$$

Notation

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

Loi exponentielle

Représentation graphique



Loi exponentielle

Fonction de répartition

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \times 1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemples type

Temps d'attente avant la survenue d'un événement (ou durée de vie d'un phénomène sans mémoire)

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale
- Satellites de la loi normale
- Exercices

Loi normale

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale (ou loi de Gauss-Laplace) de paramètres μ et σ^2 si sa densité f est définie par :

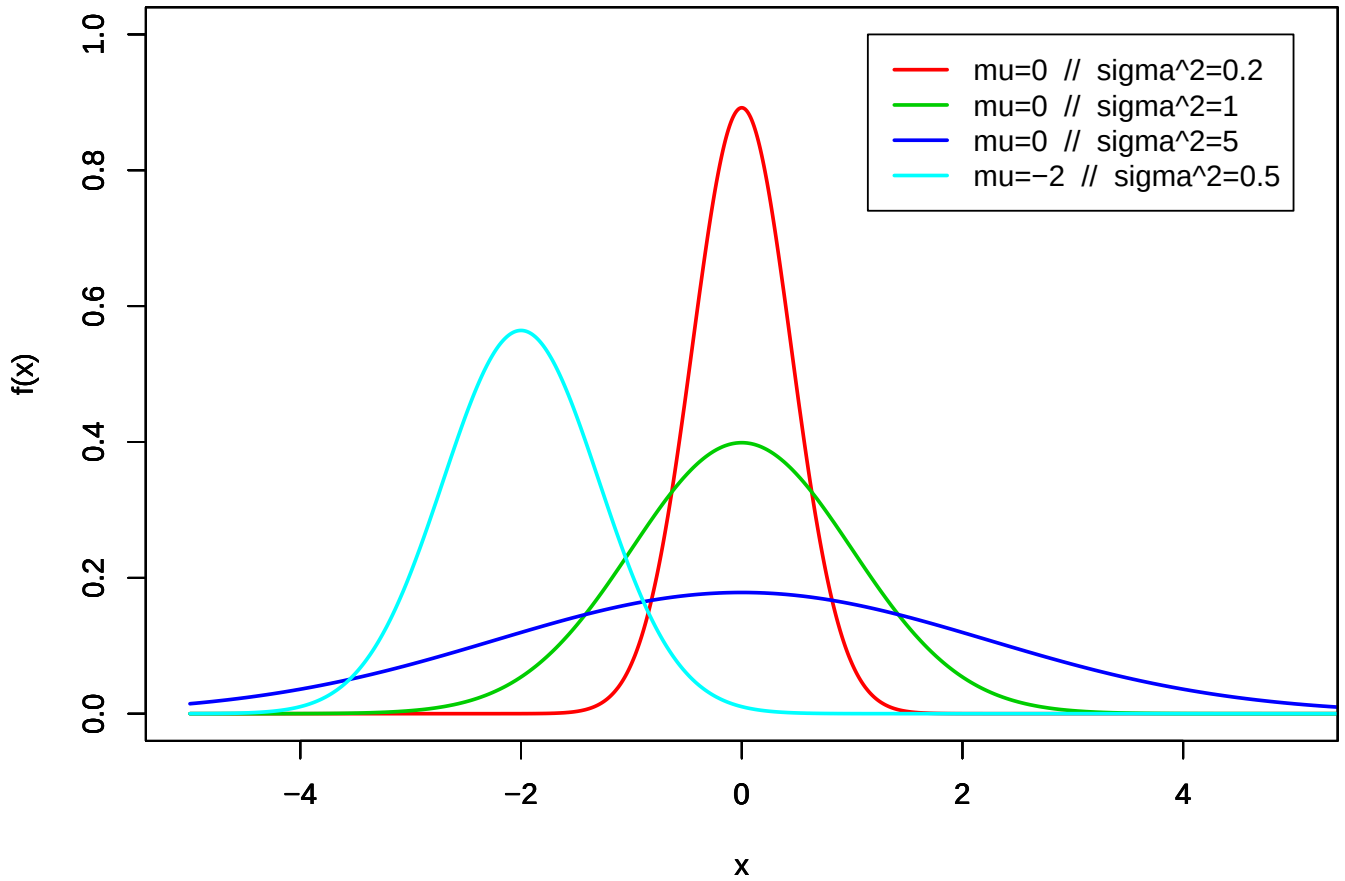
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Notation

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Loi normale

Représentation graphique



Loi normale

Fonction de répartition

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

Il n'existe pas de forme analytique de la fonction de répartition F.

Espérance et variance

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Loi normale

Stabilité par combinaisons linéaires

- Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors :

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Loi normale centrée réduite

Définition

On appelle **loi normale centrée réduite** la loi $N(0,1)$.

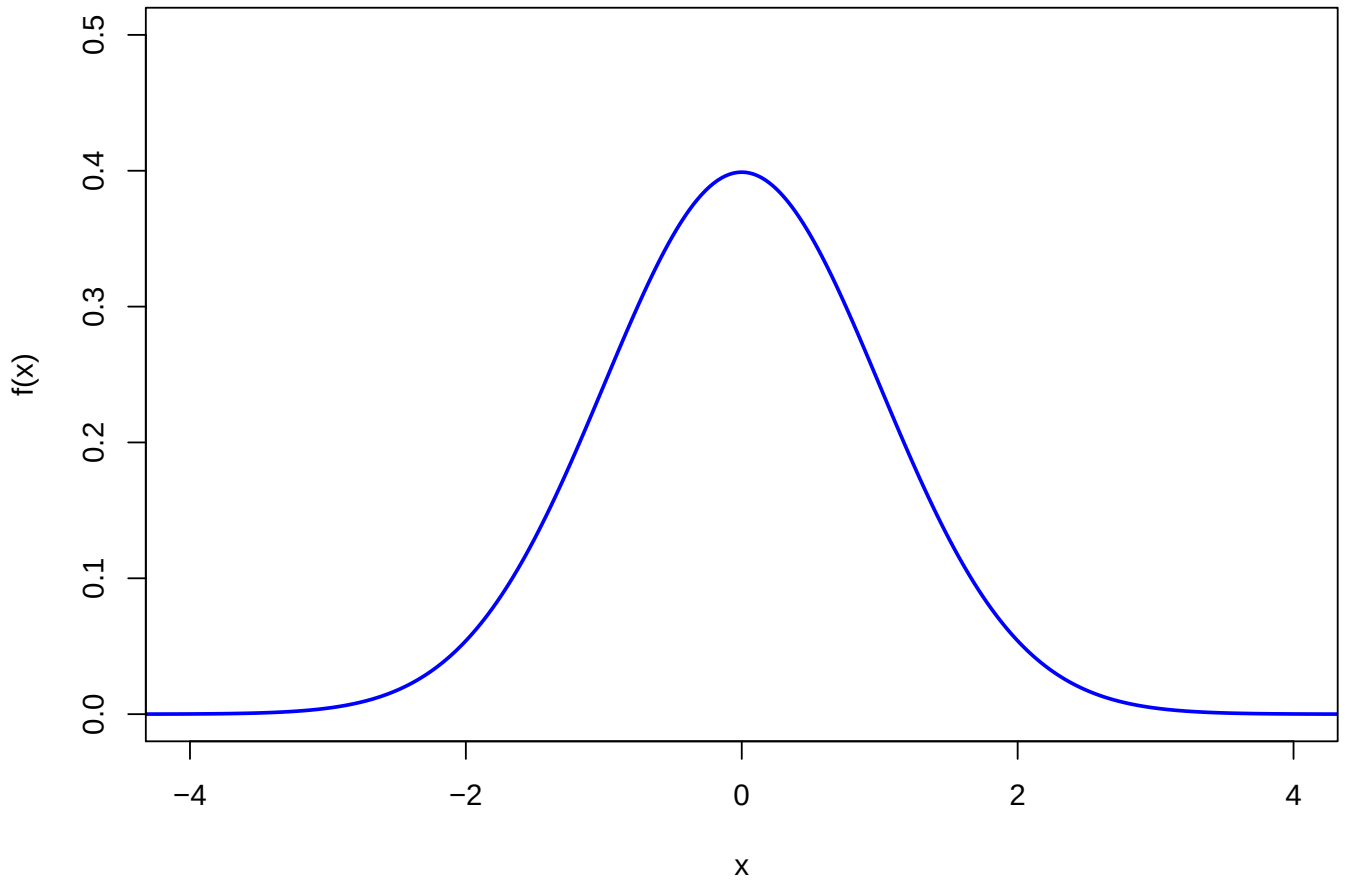
Propriété

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = \dfrac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0,1)$

Notations

Par convention, on note ϕ la densité d'une $N(0,1)$ et Φ sa fonction de répartition.

Loi normale centrée réduite



Loi normale centrée réduite

Propriétés de la loi normale centrée réduite

- ϕ est une fonction paire
- $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
- $\mathbb{P}(|X| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = 2(\Phi(x) - 1/2)$
- $\mathbb{P}(|X| \geq x) = \mathbb{P}((X \leq -x) \cap (X \geq x)) = 2(1 - \Phi(x))$

Tables de la loi normale centrée réduite

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

La table donne les valeurs de $\Phi(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq x)$ où $x = x_1 + x_2$ avec x positif.
Pour les valeurs négatives de x, on utilisera la relation $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x_1 \ x_2	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577

Tables de la loi normale centrée réduite

Quantiles de la loi normal centrée réduite

La table donne les valeurs de $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ où $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.
Pour les valeurs de $\alpha < 0.5$, on utilisera la relation $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$.

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0
0.500	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.
0.510	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.
0.520	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.
0.530	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.
0.540	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.
0.550	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.
0.560	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.
0.570	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.
0.580	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.
0.590	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.
0.600	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.
0.610	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.
0.620	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0

Théorème de la limite centrale

Théorème

Soit $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2 :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

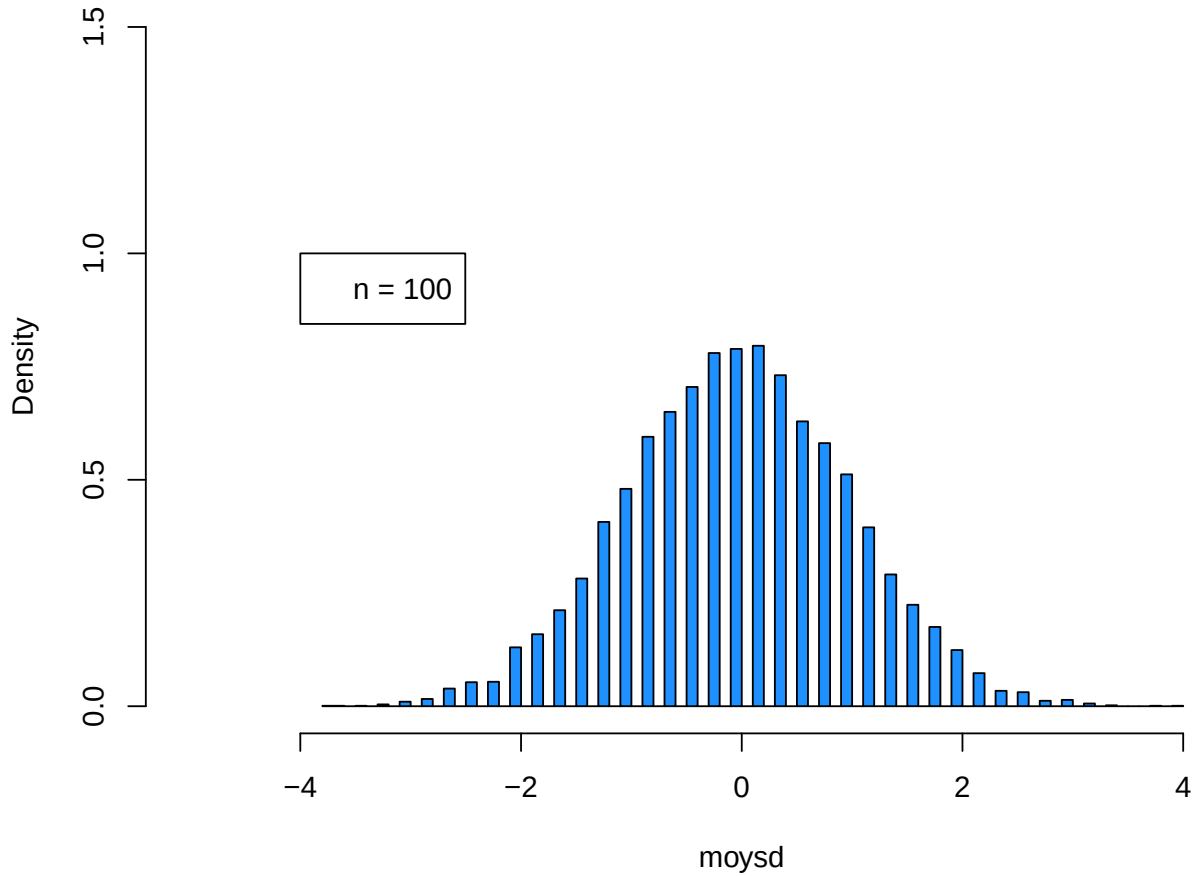
$$\Leftrightarrow Y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

Remarque

Ce théorème est appelé théorème de la limite centrale (TLC) ou théorème de la limite centrée (TLC) ou théorème central limite (TCL)

Théorème de la limite centrale

Illustration



Théorème de la limite centrale

Approximations de lois

$$X \sim B(n,p) \quad \Longrightarrow \quad X \sim P(\mu)$$

$$n \geq 30\,;\ p \leq 0.1$$

$$\mu = np \qquad \Downarrow \mu \geq 20 \qquad \sigma^2 = \mu$$

$$X \sim B(n,p) \quad \Longrightarrow \quad N(\mu, \sigma^2)$$

$$n \geq 30\,;\ np \geq 5\,;\ n(1-p) \geq 5$$

$$\mu = np\,;\ \sigma^2 = np(1-p) \qquad \Uparrow\ n \geq 30$$

$$X = Y_1 + \ldots + Y_n$$

avec $Y_1, \ldots, Y_n$ iid

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale
- Satellites de la loi normale
- Exercices

Satellites de la loi normale - Loi du χ^2

Définition

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite.
La variable aléatoire $Y = X_1^2 + ... + X_n^2$ suit une loi continue appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$$

.

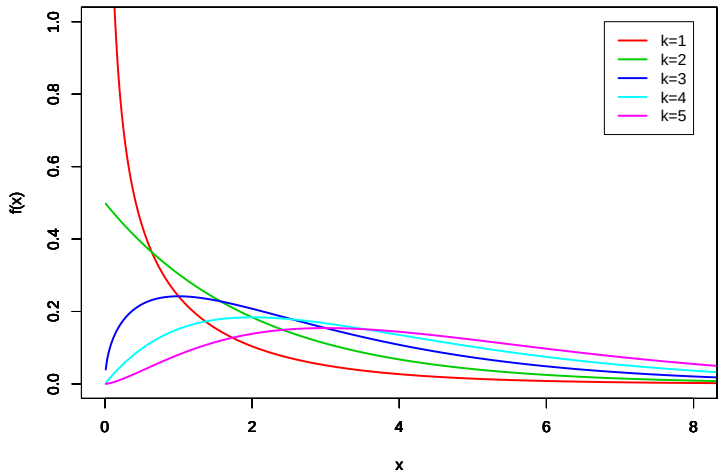
Propriétés

- Si $Y_1 \sim \chi_{n_1}^2$ et $Y_2 \sim \chi_{n_2}^2$ avec $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$, alors $Y = Y_1 + Y_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$
- Si $Y \sim \chi_n^2$, alors $E(Y) = n$ et $Var(Y) = 2n$

Satellites de la loi normale - Loi du χ^2

Densité

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n-2)/2} e^{-x/2}$$



Satellites de la loi normale - Loi de Student

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim N(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$. La variable aléatoire $T = X/\sqrt{Y/n}$ suit une loi continue appelée loi de Student à n degrés de liberté :

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n$$

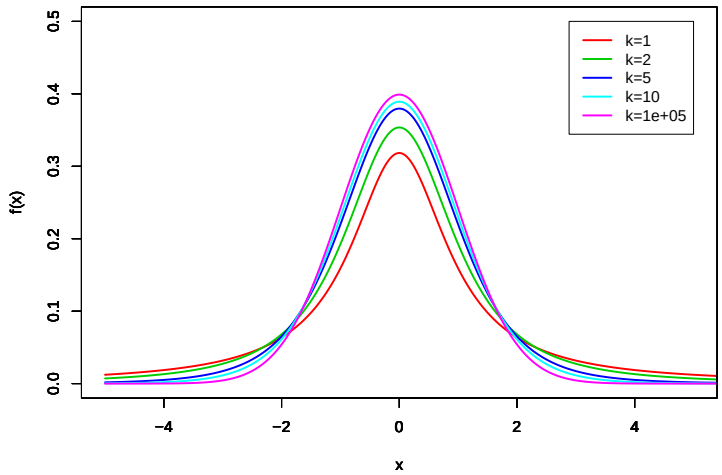
Propriétés

- $E(T) = 0$
- $Var(T) = \frac{n}{n-2}$ si $n > 2$

Satellites de la loi normale - Loi de Student

Densité

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$$



Satellites de la loi normale - Loi de Fisher-Snedecor

Définition

Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $Y_1 \sim \chi^2_{n_1}$ et $Y_2 \sim \chi^2_{n_2}$. La variable aléatoire $Z = (Y_1/n_1)/(Y_2/n_2)$ suit une loi continue appelée loi de Fisher à n_1 et n_2 degrés de liberté :

$$Z = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2} \sim \mathcal{F}(n_1; n_2)$$

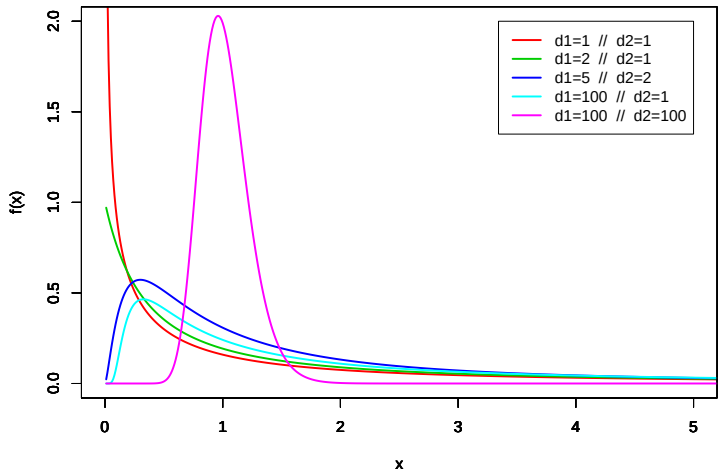
Remarques

- $Z_1 \sim F(n_2; n_1) \Rightarrow Z_2 = 1/Z_1 \sim \mathcal{F}(n_1; n_2)$
- $T \sim t_n \Rightarrow Z = T^2 \sim \mathcal{F}(1; n)$

Satellites de la loi normale - Loi de Fisher-Snedecor

Densité

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} \frac{x^{n_1/2-1}}{(n_2+n_1 x)}$$



Distributions usuelles

Lois continues

Lois de probabilité continues	Fct de densité	Fct de répartition	$E(X)$	$Var(X)$
Uniforme $X \sim U[a,b]$ $a<b$	$\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)$	$\frac{x-a}{b-a}1_{[a,b]}(x)+1_{[b,+\infty[}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim Exp(\lambda)$ $\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x}1_{\mathbb{R}^+}(x)$	$(1-e^{-\lambda x})1_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$	-	μ	σ^2
Khi-deux $X \sim \chi^2_\nu$ $\nu>0$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{(n-2)/2}e^{-x/2}$	-	ν	2ν
Student $X \sim \chi^2_\nu$ $\nu>0$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$	-	0 si $\nu\geq 2$	$\frac{\nu}{\nu-2}$ si $\nu\geq 3$
Cauchy $X \sim C(\mu,\sigma)$ $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in\mathbb{R}^+$	$\frac{\sigma}{\pi[(x-\mu)^2+\sigma^2]}$	-	n'existe pas	n'existe pas
Gamma $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ $\alpha>0$, $\beta>0$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x\beta}$ si $x\geq 0$	-	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$

1 Probabilité, indépendance, conditionnement

2 Variables aléatoires réelles

3 Résumés numériques d'une loi de probabilité

4 Lois usuelles discrètes

5 Lois usuelles continues
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale
- Satellites de la loi normale
- Exercices

Exercices

Une source radioactive émet une particule en moyenne toutes les 2 secondes. On suppose que le temps d'attente entre deux émissions suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Quelle est la valeur du paramètre λ ?
2. Quelle est la probabilité que deux émissions soient séparées de moins d'une seconde ?

Exercices

La hauteur d'une certaine espèce de plante suit une distribution uniforme entre 20 cm et 50 cm. Quelle est la probabilité qu'une plante choisie au hasard mesure entre 30 cm et 40 cm de hauteur ?

Exercices

On étudie l'activité X d'une enzyme chez des jeunes sujets. On suppose que X suit une loi normale d'espérance 0 et de variance 1.

1. Quelle est la probabilité pour que X soit compris entre 0 et 1 ?
2. Quelle est la valeur c qui vérifie $\mathbb{P}(X > c) = 0.05$?

Exercices

Soit Y une variable aléatoire telle que $Y \sim N(4, 16)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y > 0)$.
2. Déterminer h tel que $\mathbb{P}(0 < Y < h) = 0.5$.

Exercices

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Déterminer μ et σ^2 tels que $\mathbb{P}(X > 4) = 0.8413$ et $\mathbb{P}(X > 16) = 0.0228$.

Exercices

Une compagnie aérienne fournit des réservations sur le vol d'un appareil de 500 places. La probabilité qu'un passager ayant effectu la réservation pour ce vol ne se présente pas à l'embarquement est de 10%. Si la compagnie aérienne accorde 550 réservations sur ce vol, quelle est la probabilité pour que certains passagers se retrouvent sans place ?

Exercices

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ \ln(x) & 1 \leq x \leq e, \\ 1 & x \geq e. \end{cases}$$

1. Quel est le support de la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la densité de X, si elle existe.
3. Quelle est la densité de $Y = \ln(X)$? Quelle variable reconnaît-on ?