Analyse et Probabilités

-

Analyse

Cyril Dalmasso
cyril.dalmasso@univ-evry.fr

Université Evry Paris-Saclay

2026-2027

1. Généralités sur les fonctions
2. Limites
3. Continuité et dérivabilité
4. Intégrales
5. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Généralités sur les fonctions
   - Définitions
   - Propriétés globales
   - Fonctions usuelles
   - Exercices
2. Limites
3. Continuité et dérivabilité
4. Intégrales
5. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Fonctions

Définitions

- Soit E et F deux ensembles. Une **fonction** f de E dans F est une application qui à tout élément x de E associe un élément y de F. On note :

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \to F \\ & & x \mapsto f(x) \end{array}$$

- E est appelé l'**ensemble de définition** (ou **domaine de définition**) de f.
- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f.
- Soit $x \in E$ et $y \in F$ tels que f associe y à x. y est l'**image** de x par f et est noté $f(x)$. x est un **antécédant** de y par f.

Fonctions

Remarques

- Tout élément x de E a une image par f et une seule.
- Un élément y de F peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédants.
- Une fonction ne se réduit pas à "la formule de f". Il faut toujours préciser les ensembles de définition et d'arrivée.
- Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons principalement aux fonctions réelles d'une variable réelle, c'est à dire telles que $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$.

Fonctions

Exemple

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f & : & D_f \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x-1}} \end{array}$$

1. Domaine de définition de f : $D_f =]1, +\infty[$
2. Image de 2 par f : $f(2) = \sqrt{\frac{1}{2-1}} = 1$
3. Image du domaine de définition de f : $f(D_f) =]0, +\infty[$

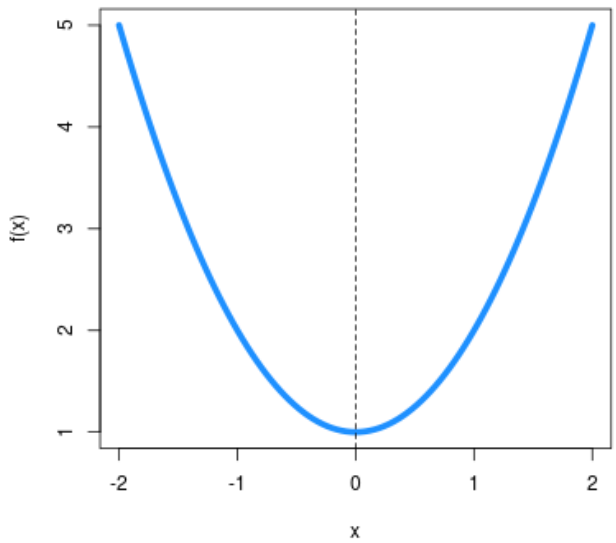
Graphe d'une fonction

Définition

Soit une fonction f définie sur l'ensemble E et soit (Ox, Oy) un repère cartésien. L'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x)), x \in E$ est appelé le **graphe** de f

Exemple

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto x^2 + 1 \end{array}$$



Bijections et fonctions réciproques

Définition

Une fonction $f : E \to F$ est une **bijection** si tout élément y de F a un antécédant et un seul .

Exemples

- $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est une bijection.
- $g : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas une bijection

  (car certains éléments de $[0,1]$ ont plusieurs antécédants).
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas une bijection

  (car certains éléments de $\mathbb{R}$ n'ont pas d'antécédants).

Bijections et fonctions réciproque

Théorème

Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors f admet une fonction réciproque, c'est à dire qu'il existe une fonction $f^{-1} : F \to E$ telle que :

- $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$

Exemple

$$f : \begin{array}{l} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto x^2 \end{array} \qquad f^{-1} : \begin{array}{l} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$$

Composition de fonctions

Définition

Soit $E, F, G \subset \mathbb{R}$ et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. On appelle **composée** de f et g et on note $g \circ f$ la fonction

$$\begin{array}{rcl} g \circ f & : & E \to G \\ & & x \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

Exemple

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

- Si $x \geq 0$, $g(f(x)) = x$.
- Si $x < 0$, $g(f(x)) = -x$.

Par conséquent, $g \circ f(x) = |x|$

Composition de fonctions

Remarque

Attention, en général :

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Exemple

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$.

Alors $g \circ f(x) = 2x^2$ et $f \circ g(x) = 4x^2$.

1. Généralités sur les fonctions
   - Définitions
   - Propriétés globales
   - Fonctions usuelles
   - Exercices
2. Limites
3. Continuité et dérivabilité
4. Intégrales
5. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Fonctions bornées

Définition

Soit f une fonction définie sur E.

- f est **majorée** sur E si il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in E, f(x) \leq M$$

- f est **minorée** sur E si il existe un réel m tel que :

$$\forall x \in E, f(x) \geq m$$

- f est **bornée** sur E si f est à la fois majorée et minorée sur E.

Fonctions bornées

Exemples

- $f_1(x) = \cos x$ est bornée sur $\mathbb{R}$
- $f_2(x) = x^2$ est minorée mais non majorée sur $\mathbb{R}$

Remarque

Les majorants (ou minorants) d'une fonction majorée (ou minorée) ne sont pas uniques.

Fonctions paires et impaires

Définition

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit **symétrique** si pour tout $x \in E$, $-x \in E$

Exemples

- $[-1, 1]$, $\mathbb{R}$, $[-2, -1] \cup [1, 2]$ sont de ensembles symétriques
- $\mathbb{R}^+$, $[-1, 2]$ ne sont pas symétriques.

Fonctions paires et impaires

Définitions

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

- f est une **fonction paire** si E est un ensemble symétrique et $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$
- f est une **fonction impaire** si E est un ensemble symétrique et $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$

Proposition

- Si f est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine

Fonctions paires et impaires

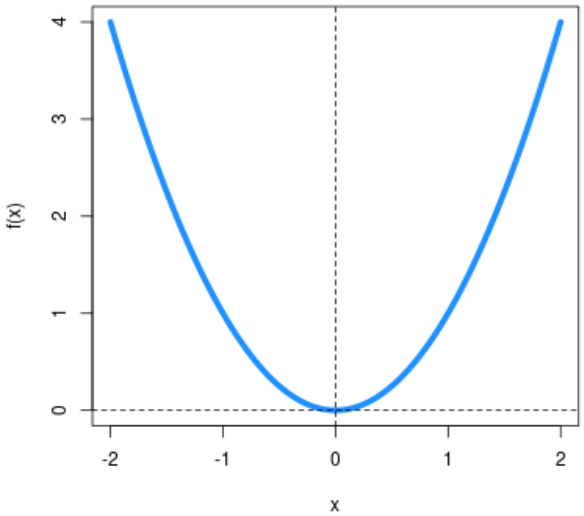
Exemples

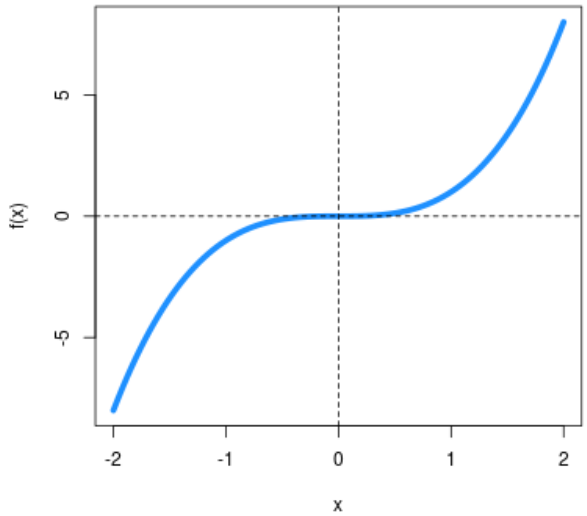
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est une fonction paire.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

est une fonction impaire.





Fonctions périodiques

Définitions

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. f est dite **périodique** de période T s'il existe un réel $T > 0$ tel que

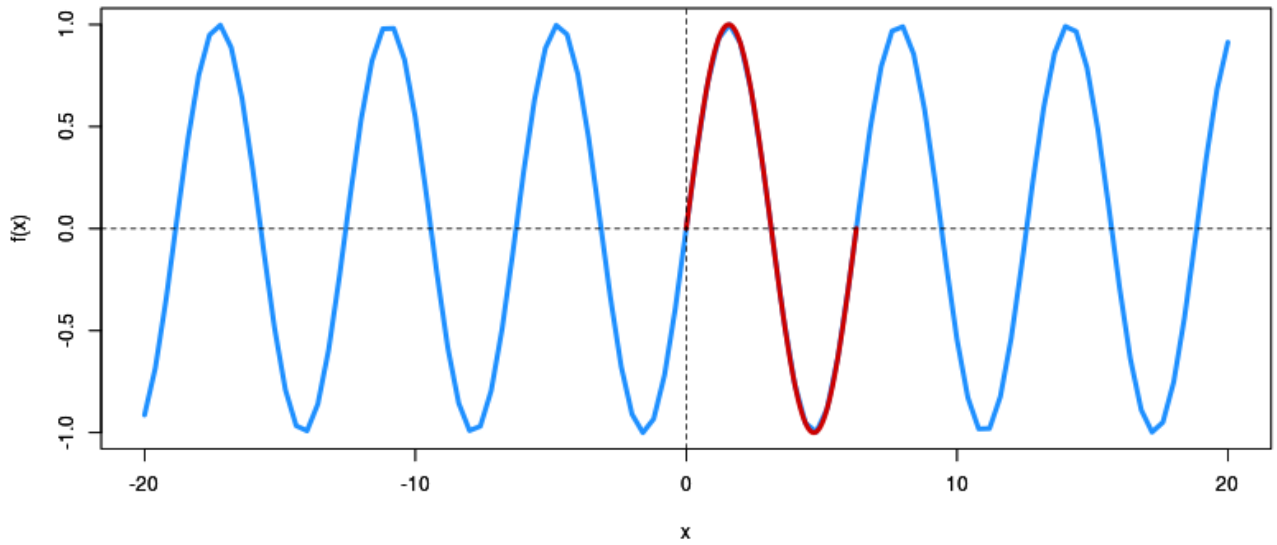
1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \in E \Leftrightarrow x + T \in E$
2. $\forall x \in E, f(x + T) = f(x)$

Fonctions périodiques

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

est une fonction périodique de période 2π.



Fonctions monotones

Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

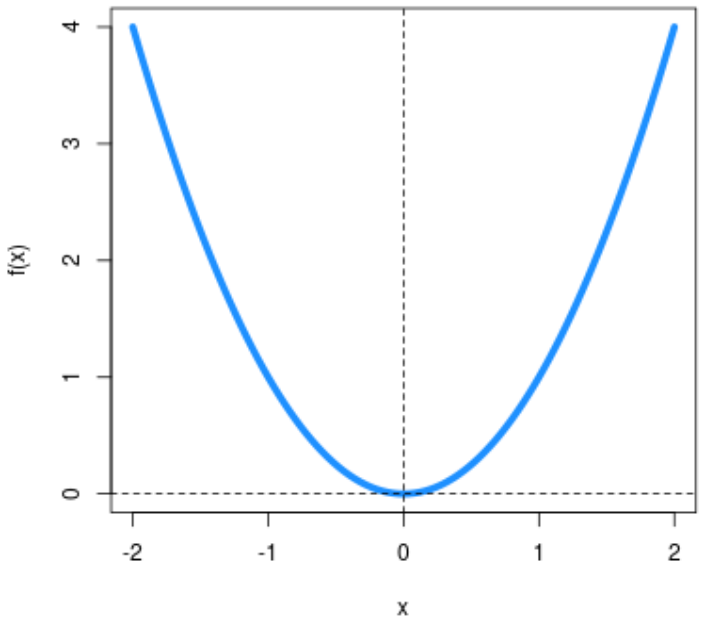
- f est **croissante** sur I si
  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f est **strictement croissante** sur I si
  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f est **décroissante** sur I si
  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- f est **strictement décroissante** sur I si
  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Fonctions monotones

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est une fonction décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.



1. Généralités sur les fonctions
   - Définitions
   - Propriétés globales
   - Fonctions usuelles
   - Exercices
2. Limites
3. Continuité et dérivabilité
4. Intégrales
5. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Fonction constante

Définition

La **fonction constante** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto a \end{array}$$

où a est un nombre réel.

Fonction identité

Définition

La fonction **identité** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto x \end{array}$$

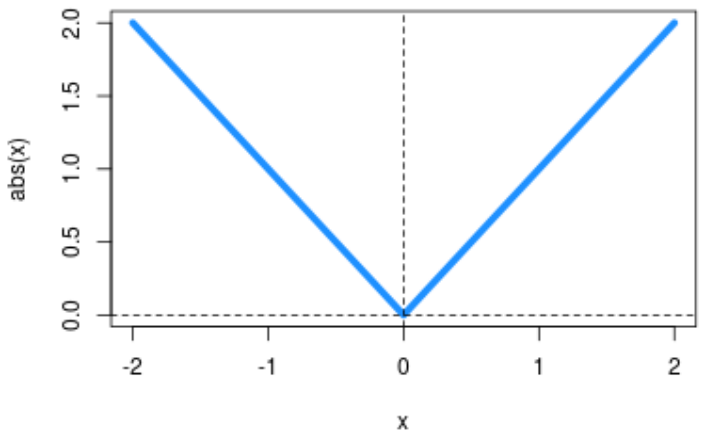
Fonction valeur absolue

Définition

La fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Graphe



Fonction puissances entières

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La **puissance n-ième** de a est définie par :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & & a \mapsto a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \end{array}$$

Opérations sur les puissances entières

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n, p \in \mathbb{N}$

- $a^n a^p = a^{n+p}$
- $(a^n)^p = a^{np}$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- Si $b \neq 0$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ et $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

Polynômes

Définitions

- Un **polynôme** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- Le degré de P est la plus grande puissance ayant un coefficient non nul.
- On appelle **racine** de P tout réel x_0 tel que $P(x_0) = 0$.

Propriété

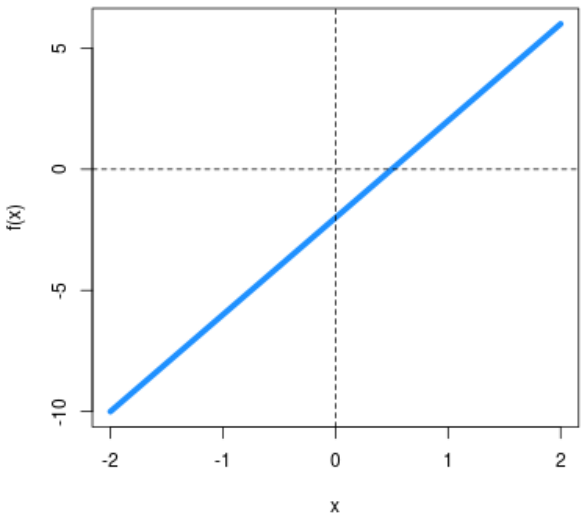
Un polynôme de degré d a au plus d racines.

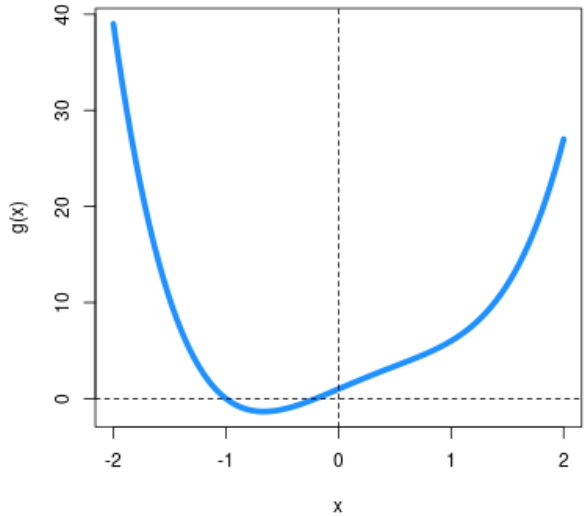
Polynômes

Exemples

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x-2 \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^4-2x^3+5x+1 \end{array}$$





Fractions rationnelles

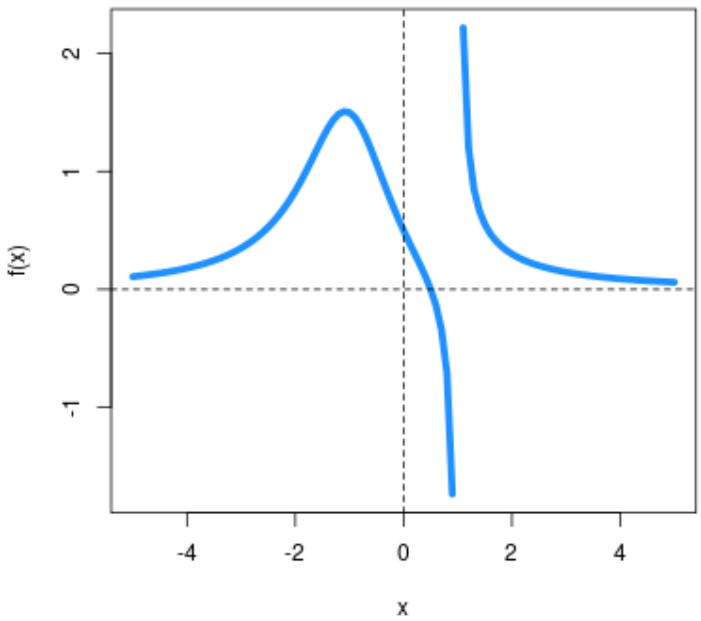
Définition

On appelle **fraction rationnelle** toute fonction de la forme $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes.

Fractions rationnelles

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x-1}{x^3+x^2-2} \end{array}$$



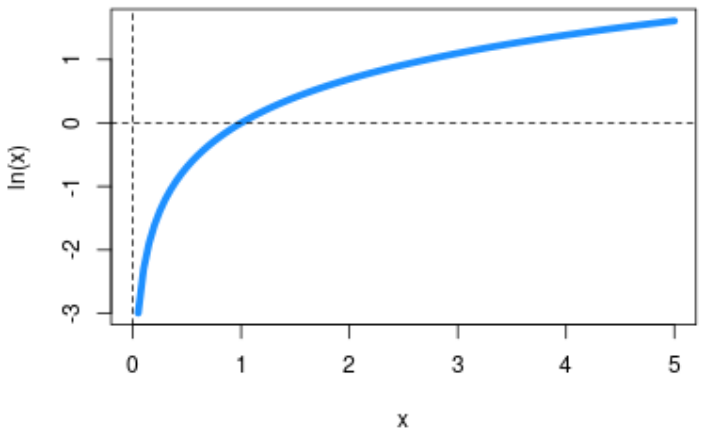
Logarithme népérien

Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ telle que

- $\ln(1) = 0$
- $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$

Graphe



Logarithme népérien

Propriétés

- La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- $\exists ! e \in \mathbb{R} | \ln(e) = 1$.
- $\forall a > 0, \forall b > 0, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\forall a > 0, \forall b > 0, \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln(a)$

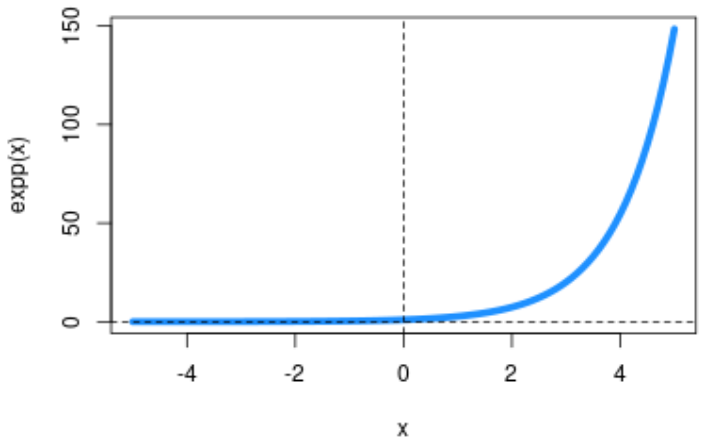
Exponentielle

Définition

La fonction exponentielle, notée exp, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$

Graphe



Exponentielle

Propriétés

- La fonction **exponentielle** est la fonction réciproque de la fonction ln. C'est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$
  - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln(x)) = x$
- En particuliers, $\exp(1) = e$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \exp(ab) = (\exp(a))^b$

Exponentielle

Notation

Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b on pose :

$$a^b = exp(b \ln a)$$

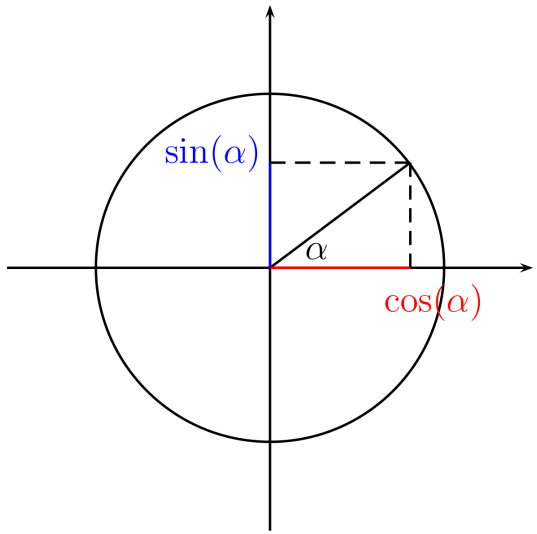
Remarques

- Puisque $\ln(e) = 1$, cela permet de noter : $\exp(x) = \exp(x \ln e) = e^x$
- Cette notation est compatible avec la fonction puissance

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n &= \exp(n \ln(x)) \\ &= \exp(\underbrace{\ln(x) + ... + \ln(x)}_{n \text{ fois}}) \\ &= \underbrace{x \times x \times ... \times x}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques

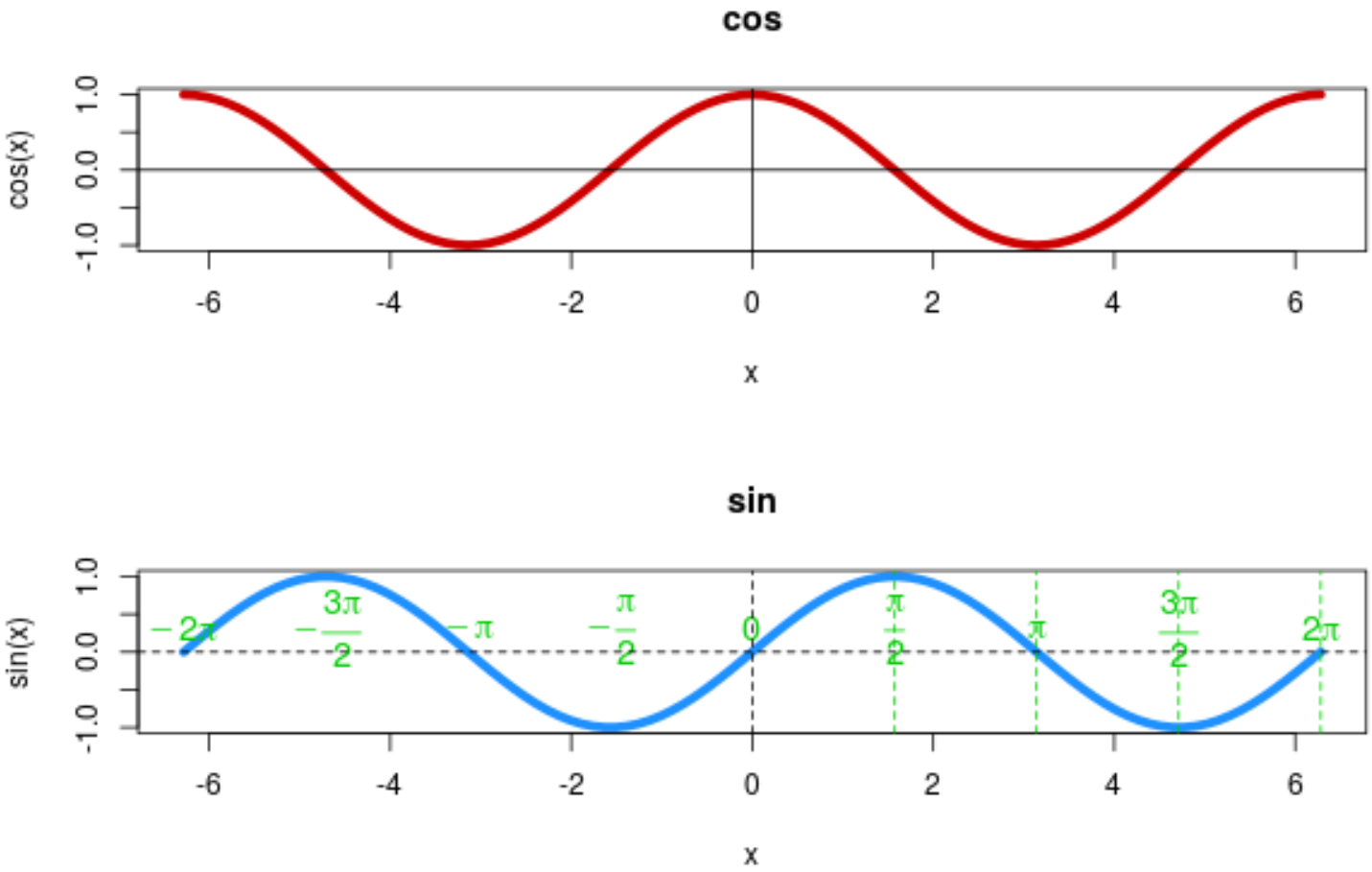
sinus et cosinus



	cos	sin
Domaine de définition	$\mathbb{R} \to [-1, 1]$	$\mathbb{R} \to [-1, 1]$
Périodicité	2π	2π
Parité	paire	impaire
Dérivées	$\cos' x = -\sin x$	$\sin' x = \cos x$

Fonctions trigonométriques

sinus et cosinus



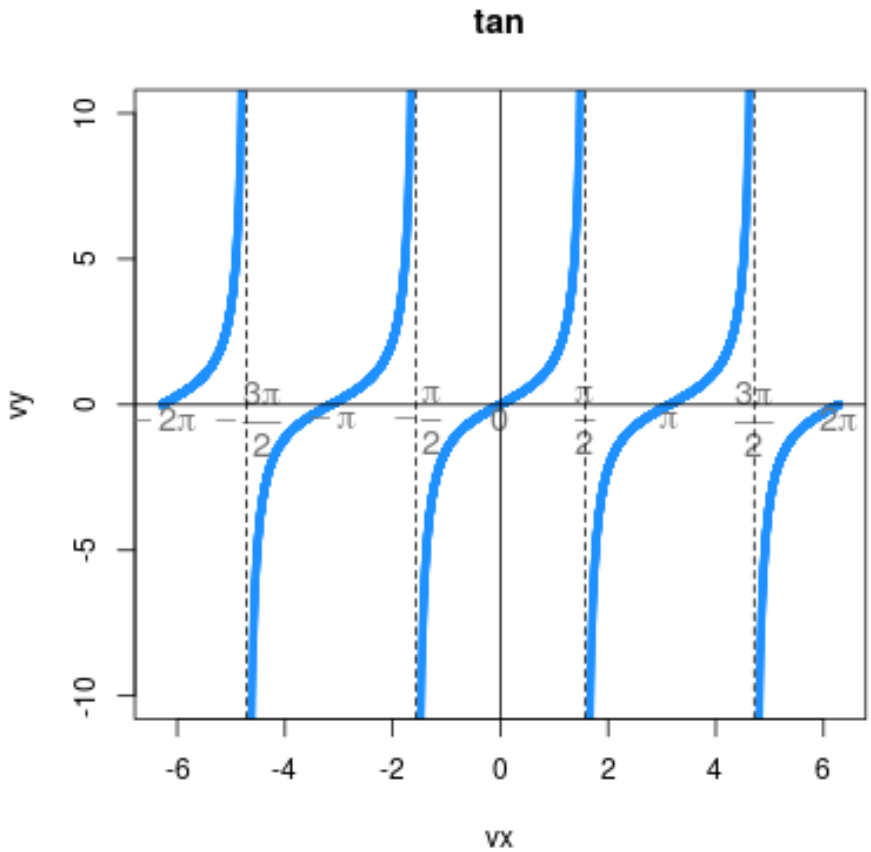
Fonctions trigonométriques

tangente

	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
Domaine de définition	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Périodicité	π
Parité	impaire
Dérivées	$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Fonctions trigonométriques

tangente



Fonctions trigonométriques réciproques

Définitions

- La fonction sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est une bijection. Elle admet une fonction réciproque que l'on note *arcsin*
- La fonction cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ est une bijection. Elle admet une fonction réciproque que l'on note *arccos*
- La fonction tan : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est une bijection. Elle admet une fonction réciproque que l'on note *arctan*

1. Généralités sur les fonctions
   - Définitions
   - Propriétés globales
   - Fonctions usuelles
   - Exercices
2. Limites
3. Continuité et dérivabilité
4. Intégrales
5. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercices

Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(e^2)$
2. $\ln(1000)$
3. $\ln(24) - \ln(8)$
4. $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
5. $e^{\frac{1}{2}\ln(9)}$
6. $e^{2\ln(5)}$
7. $\ln(e^{\sqrt{2}})$
8. $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

.

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants :

1. $x = \ln(8)$
2. $x = \frac{1}{2}\ln(16)$
3. $x = \ln(0.5)$
4. $x = \ln(36) - 2\ln(3)$

.

Exercices

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le plus grand ensemble de définition possible :

1. $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$
2. $f(x) = \sqrt{2x+1}$
3. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
4. $f(x) = (x+1)\ln(x+3)$
5. $f(x) = \frac{e^x+2}{e^x-2}$
6. $f(x) = \ln(e^x - 2)$

.

Exercices

Soit u et v deux fonctions. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$ dans chacun des cas suivants :

1. $u : x \mapsto \ln(x^2 - 2)$ et $v : x \mapsto \sqrt{x+2}$
2. $u : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ et $v : x \mapsto x^2 + 2$

.

Exercices

Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires, ni paire ni impaire ?

1. $f(x) = 5x^2 + \frac{3}{2}$
2. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$
3. $f(x) = \sqrt{x - 2}$
4. $f(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)+2}}$

.

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites
- Définitions
- Unicité - existance
- Calcul de limites
- Exercices

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Limite finie en l'infini

Définitions

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 | \forall x > A, |f(x) - l| < \epsilon$$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $-\infty$ et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 | \forall x < -A, |f(x) - l| < \epsilon$$

Limite finie en l'infini

Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

En effet, pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir $A = \frac{1}{\epsilon}$. Ainsi, si $x > A$, alors $x > \frac{1}{\epsilon}$. On a donc bien : $|f(x) - 0| = \frac{1}{x} < \epsilon$

Limites infinies en l'infini

Définitions

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists A > 0 | \forall x > A, f(x) > M$$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists A > 0 | \forall x < -A, f(x) > M$$

Limites infinies en l'infini

Définitions

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists A > 0 | \forall x > A, f(x) < M$$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists A > 0 | \forall x < -A, f(x) < M$$

Limites infinies en l'infini

Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

En effet, pour tout $M > 0$, on peut choisir $A = e^M$. Ainsi, si $x > A$, alors $x > e^M$. On a donc bien : $\ln(x) > M$

Limite finie en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b, a[\cup]a, c[$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en a et on note $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Limite finie en un point

Exemple

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

En effet, pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir $\eta = min(1, \frac{\epsilon}{3})$. Si l'on pose $y = x - 1$, alors $x^2 - 1 = 2y + y^2$. Ainsi :

$$|x - 1| = |y| < \eta \Rightarrow |x^2 - 1| = |2y + y^2| \leq |3y| < \epsilon$$

Limite finie en un point

Remarques

- Si l'on restreint l'intervalle de définition à $]a, c[$, on parle de limite à droite de f en a et on la note $\lim_{x \to a^+} f(x)$
- Si l'on restreint l'intervalle de définition à $]b, a[$, on parle de limite à gauche de f en a et on la note $\lim_{x \to a^-} f(x)$

Limite finie en un point

Exemple

Soit

$$f : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\lim_{x \to 0^-} = -1$$
$$\lim_{x \to 0^+} = 1$$

Limite infinie en un point

Definition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b, a[\cup]a, c[$. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0 : |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > M$$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b, a[\cup]a, c[$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0 : |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < -M$$

Limite infinie en un point

Exemple

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

En effet, pour tout $M > 0$ on peut choisir $\eta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Ainsi, si $|x| > \eta$, alors $x^2 < \frac{1}{M}$. On a donc $\frac{1}{x^2} > M$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites
- Définitions
- Unicité - existance
- Calcul de limites
- Exercices

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Unicité

Notation

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

Théorème

Soit f une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Alors cette limite est unique.

Critères d'existance

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ $((a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2)$

- Si f est croissante et majorée sur I, $\lim_{x \to b} f(x)$ existe.
- Si f est décroissante et minorée sur I, $\lim_{x \to b} f(x)$ existe.
- Si f est croissante et minorée sur I, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
- Si f est décroissante et majorée sur I, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

Théorème "des gendarmes"

Soit f, g, h trois fonctions définies sur D et $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que :

1. $\forall x \in D, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
2. $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$

Alors $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et $\lim_{x \to a} f(x) = l$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites
- Définitions
- Unicité - existance
- Calcul de limites
- Exercices

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Calcul de limites

Opération sur les limites

Soit f et g deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a, l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$

Fonction h	Hypothèses	$\lim_{x \to a} h(x)$
$h = f + g$	$l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$	$l + l'$
	$l \in \mathbb{R}$ et $l' = -\infty$	$-\infty$
	$l \in \mathbb{R}$ et $l' = +\infty$	$+\infty$
	$l = +\infty$ et $l' = +\infty$	$+\infty$
	$l = -\infty$ et $l' = -\infty$	$-\infty$
$h = \lambda f$	$l \in \mathbb{R}$	λl
	$\lambda > 0$ et $l = +\infty$	$+\infty$
	$\lambda < 0$ et $l = +\infty$	$-\infty$
	$\lambda > 0$ et $l = -\infty$	$-\infty$
	$\lambda < 0$ et $l = -\infty$	$+\infty$

Calcul de limites

Opération sur les limites

Soit f et g deux fonctions et $a, l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l'$

Fonction h	Hypothèses	$\lim_{x\to a} h(x)$
$h = fg$	$l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$	ll'
	$l > 0$ et $l' = +\infty$	$+\infty$
	$l < 0$ et $l' = +\infty$	$-\infty$
	$l > 0$ et $l' = -\infty$	$-\infty$
	$l < 0$ et $l' = -\infty$	$+\infty$
	$l = +\infty$ et $l' = +\infty$	$+\infty$
	$l = -\infty$ et $l' = -\infty$	$+\infty$
	$l = +\infty$ et $l' = -\infty$	$-\infty$

Calcul de limites

Opération sur les limites

Soit f et g deux fonctions et $a, l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l'$

Fonction h	Hypothèses	$\lim_{x\to a} h(x)$
$h = \frac{1}{f}$	$l \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{l}$
	$l = +\infty$ ou $l = -\infty$	0
	$l = 0$ et $f > 0$	$+\infty$
	$l = 0$ et $f < 0$	$-\infty$

Remarque

Tous les cas non cités dans les trois tableaux précédents sont des formes indéterminées ($\frac{l}{0}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$) pour lesquelles seule une étude plus précise de la fonction permet de conclure.

Calcul de limites

Composition

Soit f et g deux fonctions et $(a, b, c) \in \overline{\mathbb{R}}^3$ tels que :

1. $\lim_{x \to a} f(x) = b$
2. $\lim_{y \to b} g(y) = c$

Alors $\lim g \circ f(x)$ existe et $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$

Calcul de limites

Polynômes

En $\pm\infty$, les limites des polynômes sont celles du terme de degré le plus élevé

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 6x - 3$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty$$

Preuve

.

.

.

.

.

Calcul de limites

Fractions rationnelles

Soit P_1 et P_2 deux polynômes de degrés d_1 et d_2 et soit $\widetilde{P_1}$, $\widetilde{P_2}$ les termes de plus haut degré de P_1 et P_2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\widetilde{P_1}(x)}{\widetilde{P_2}(x)}$$

Exemples

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 - 4x^2 + x}{2x^3 + 6x^2 - 9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x^{(5-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5 + x^4 - 2x^2}{-3x^5 + 6x^2 - x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5}{-3x^5} = -\frac{4}{3}$$

Calcul de limites

Limites connues

$$\lim_{x\to-\infty} \quad x^\alpha e^x = 0 \qquad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \quad \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \quad \frac{e^x}{\ln(x)^\beta} = +\infty \qquad \forall \beta > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \quad \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \forall \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\lim_{x\to0} \quad \frac{x^\alpha}{\ln(x)^\beta} = 0 \qquad \forall \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\lim_{x\to0} \quad x^\alpha \ln(x)^\beta = 0 \qquad \forall \alpha > 0, \beta > 0$$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites
- Définitions
- Unicité - existance
- Calcul de limites
- Exercices

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercices

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x+\sqrt{x})$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{2x^2-x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4x^2-5x}{2x^2-1}+e^{-x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos(e^{-x})$
5. $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^2 e^{\frac{1}{(x-1)}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x^4 - x$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

.

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité
- Continuité
- Dérivabilité
- Exercices

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Continuité

Définitions

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f est **continue en** a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est **continue sur** I si elle est continue en x pour tout $x \in I$

Remarque

Si on a seulement $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$), on dit que f est continue à droite en a (resp. à gauche).

Continuité

Exemple

Soit

$$f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue pout tout $a \in \mathbb{R}^*$ mais pas continue en 0. Elle est cependant continue à droite en 0.

Continuité

Propriétés

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- λf est continue
- $f + g$ est continue
- fg est continue
- Si f ne s'annule pas, $\frac{1}{f}$ est continue

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors

- $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue.

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité
- Continuité
- Dérivabilité
- Exercices

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Dérivabilité

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, on appelle cette limite la dérivée de f en a et on note $f'(a)$ la valeur de cette limite.

Exemple

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a$$

La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$

Dérivabilité

Remarques

- Les deux écritures $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sont équivalentes.
- Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
  Attention, la réciproque est fausse.
- Si seule existe $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (resp. $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$), on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche).
- Soit f une fonction dérivable en a. Alors $f'(a)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$

Dérivées usuelles

Chacune des fonctions ci-dessous est dérivable sur son domaine de définition.

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$arcsin(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opérations sur les dérivées

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- λf est dérivable et $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
- $f + g$ est dérivable et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- fg est dérivable et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Si g ne s'annule pas, $\frac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur leurs ensemble de définition. Alors :

- $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)'(x) = f'(x)(g' \circ f)(x)$

Opérations sur les dérivées

Corollaire

On déduit des formules précédentes :

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)^\alpha$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x^\alpha}$	$-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$
$\frac{1}{u(x)^\alpha}$	$-\frac{\alpha u'(x)}{u(x)^{\alpha+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
...	...

Localisation et nature des extrema

Définitions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f admet un maximum (resp. un minimum) global en $c \in I$ si $\forall x \in I, f(x) \leq f(c)$ (resp $f(x) \geq f(c)$)
- f admet un maximum (resp. un minimum) local en $c \in I$ si $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in I \cap [c - \epsilon, c + \epsilon], f(x) \leq f(c)$ (resp $f(x) \geq f(c)$)

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en $c \in I$ (c'est à dire que f est dérivable en c et sa dérivée f' est aussi dérivable en c).

- Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$, f admet un maximum local en c.
- Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, f admet un minimum local en c.

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité
- Continuité
- Dérivabilité
- Exercices

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercices

Montrer que pour tout réel x strictement positif, $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Exercices

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$
3. $f(x) = \ln(\sin x)$
4. $f(x) = (\ln(x))^3$
5. $f(x) = (\ln(x^2))$
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}$
7. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
8. $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales
- Définitions
- Propriétés
- Intégration par parties
- Changement de variable
- Intégration de fractions rationnelles
- Exercices

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F définie sur I est une primitive de f si F est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Exemples

- Sur R, $x^2 + 2$ est une primitive de $2x$
- Sur $]-1, +\infty[$, $\ln(1+x)$ est une primitive de $\frac{1}{1+x}$

Primitives

Remarques

- Si f est une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} G & : & I \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto F(x) + c \end{array}$$

est une primitive de f sur I

Notation

L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f(x)dx$

Remarque

Si $a \in I$, alors $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ est l'unique primitive qui s'annule en a.

Primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$e^x + C$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsin(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arccos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x) + C$
...	...

Intégrales

Définition

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit $(a, b) \in I^2$. On appelle intégrale de f entre a et b et on note $\int_a^b f(t)dt$ le réel :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

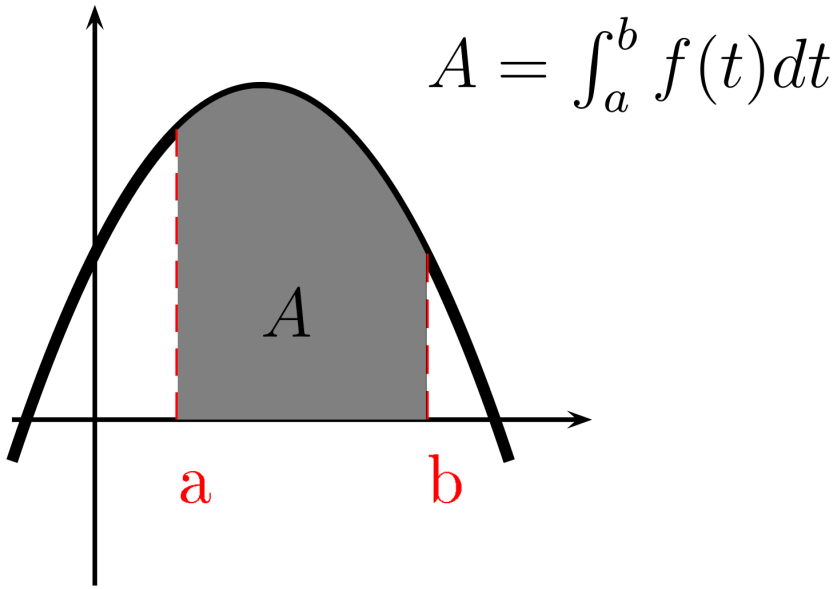
Exemple

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Intégrales

Interprétation géométrique

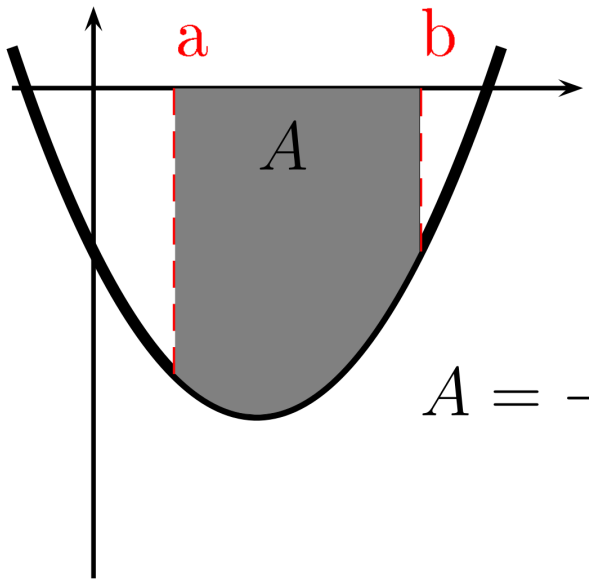
- Si f est positive et $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ correspond à l'aire sous la courbe de f entre a et b :



Intégrales

Interprétation géométrique

- Si f est négative et $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ correspond à l'aire sous la courbe de f entre a et b comptée négativement :

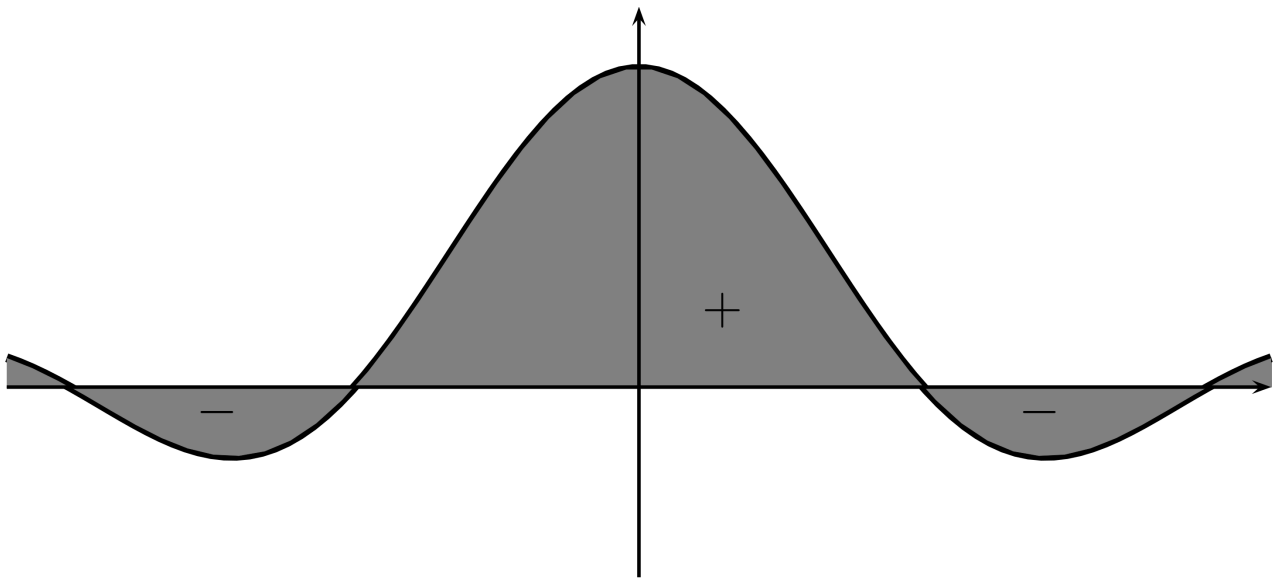


$$A = -\int_a^b f(t)dt$$

Intégrales

Interprétation géométrique

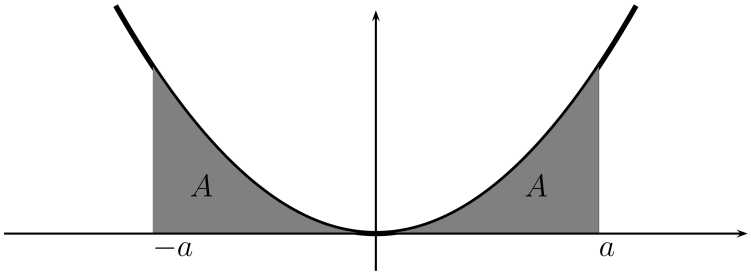
- Dans le cas général, si $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ correspond à la différence entre l'aire mesurée au-dessus de l'axe des abscisses et l'aire mesurée au-sessous de l'axe des abscisses :



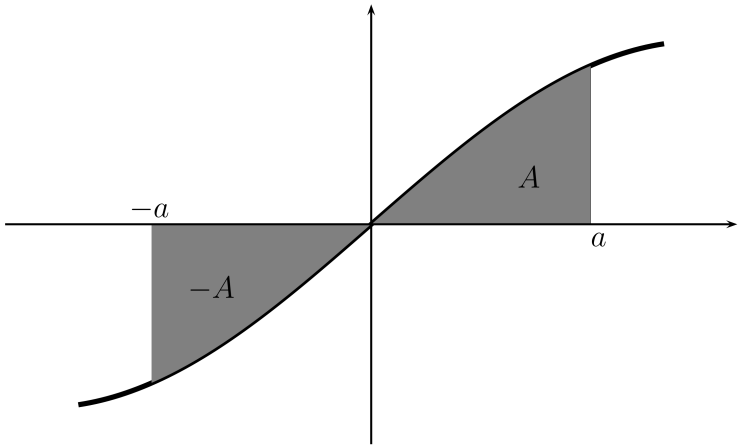
Intégrales

Remarques

- Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$



- Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$



1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales
- Définitions
- Propriétés
- Intégration par parties
- Changement de variable
- Intégration de fractions rationnelles
- Exercices

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Inversion des bornes

Proposition

Soit f une fonction intégrable sur I et $(a, b) \in I^2$.

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Démonstration

(A faire en exercice)

Relation de Chasles

Proposition

Soit f une fonction intégrable sur I et $(a, b, c) \in I^3$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Démonstration

(A faire en exercice)

Multiplication par une constante

Proposition

Soit f une fonction intégrable sur I, $(a, b) \in I^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

Démonstration

(A faire en exercice)

Somme

Proposition

Soit f et g deux fonctions intégrables sur I et $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Démonstration

(A faire en exercice)

Fonctions positives

Proposition

Soit f une fonction positive intégrable sur I et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

Démonstration

(A faire en exercice)

Comparaison

Théorème

Soit $a < b$ et f et g deux fonctions telles que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$.
Alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Démonstration

(A faire en exercice)

Intégrale convergente

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

Dans le cas contraire, $\int_a^b f(t)dt$ est dite divergente.

Exemple

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est impropre en $+\infty$, converge et :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{+\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{1} \right) = 0 + 1 = 1$$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales
- Définitions
- Propriétés
- Intégration par parties
- Changement de variable
- Intégration de fractions rationnelles
- Exercices

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Intégration par parties

Proposition

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration

(A faire en exercice)

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales
- Définitions
- Propriétés
- Intégration par parties
- Changement de variable
- Intégration de fractions rationnelles
- Exercices

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Changement de variable

Théorème

Soit $\phi : I \to J$ une fonction dérivable et soit f une fonction continue sur I. Soit $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

Démonstration

(A faire en exercice)

Changement de variables

Remarque

Un changement de variable peut se faire "dans les deux sens" suivant le problème :

- S'il faut calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$, on remplace par $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$
- S'il faut calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)dx$, on pose $x = \phi(t)$ et on remplace par $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales
- Définitions
- Propriétés
- Intégration par parties
- Changement de variable
- Intégration de fractions rationnelles
- Exercices

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Polynômes irréductibles

Définition

Un polynôme P non constant de $\mathbb{R}[X]$ est **irréductible** s'il ne peut pas se factoriser, c'est à dire s'il n'existe pas de polynôme Q et R non constants tels que $P = QR$

Proposition

Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- les polynômes de degré 1
- les polynômes de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Remarque

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = \prod_{i=1}^{n} B_i^{\alpha_i}$ où chaque B_i est irréductible.

Intégration des fractions rationnelles

Théorème

Soit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle et $Q(X) = \prod_{i=1}^{n} B_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles du dénominateur. Alors il existe des polynômes E et $C_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq \alpha_i}$ tels que :

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ij}(X)}{B_i^j(X)}$$

Proposition

Soit $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle et $E(X) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ij}(X)}{B_i^j(X)}$ sa décomposition. Alors :

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b E(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \int_a^b \frac{C_{ij}(x)}{B_i^j(x)}dx$$

Intégration des fractions rationnelles

Exemple

$$\int_0^x \frac{t^4+t^3-t}{t^3-t^2-t+1}dt = \int_0^x \left(t+2+\frac{11}{4(t-1)}+\frac{1}{2(X-1)^2}+\frac{1}{4(X+1)}\right)dt$$

$$= \int_0^x (t+2)dt + \int_0^x \frac{11}{4(t-1)}dt + \int_0^x \frac{1}{2(t-1)^2}dt + \int_0^x \frac{1}{4(t+1)}dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}+2t\right]_0^x + \left[\ln|t-1|\right]_0^x + \left[-\frac{1}{t-1}\right]_0^x + \left[\ln|t+1|\right]_0^x$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{11}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{4}\ln(1+x)+\frac{x}{2(1-x)}$$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales
- Définitions
- Propriétés
- Intégration par parties
- Changement de variable
- Intégration de fractions rationnelles
- Exercices

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercices

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 (x^2 + x + 1)dx$
2. $\int_1^3 (x+1)e^x dx$
3. $\int_1^3 x\ln(x)dx$ (intégration par parties)
4. $\int_1^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)$ (double intégration par parties)
5. $\int_0^1 \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}dt$ (intégration directe ou changement de variable)
6. $\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ (changement de variable)

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1
- Définitions
- Ensemble des solutions
- Méthodes de résolution
- Exercices

Equations différentielles

Définitions

- On appelle **équation différentielle** une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

Exemple

$$f'(x) = e^{(x+f(x))}$$
$$\Leftrightarrow y'(x) = e^{(x+y(x))}$$
$$\Leftrightarrow y' = e^{(x+y)}$$

Exercice

Montrer que sur $D_y =]-\infty, 0[$, $y = -\ln(1-e^x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = e^{(x-y)}$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Définitions

- On appelle **equation différentielle linéaire d'ordre 1** toute équation différentielle de la forme

$$u(x)y'(x) + v(x)y(x) = w(x) \qquad \text{(E.D.)}$$

où u, v, w sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

- On appelle **solution** de l'équation différentielle $(E.D.)$ toute fonction dérivable $y(x)$ qui vérifie l'équation.
- On appelle **équation homogène** associée à l'équation différentielle $(E.D.)$ l'équation différentielle de second membre nul :

$$u(x)y'(x) + v(x)y(x) = 0 \qquad \text{(E.H.)}$$

où u, v, w sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exemple

- On cherche sur $\mathbb{R}_+^*$ les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :
$$xy' + y = 1$$
- La fonction $y(x) = 1 + \frac{1}{x}$ est une solution (ce n'est pas la seule) de cette équation différentielle. En effet, $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et on a bien $xy'(x) + y(x) = -\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x} = 1$
- L'équation homogène associée est $xy' + y = 0$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1
- Définitions
- Ensemble des solutions
- Méthodes de résolution
- Exercices

Existence de solutions

Théorème

Si a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I, l'équation différentielle $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ admet des solutions.

Existence de solutions

Remarque

Si l'équation différentielle étudiée est du type

$$u(x)y'(x) + v(x)y(x) = w(x) \qquad \text{(E.D.)}$$

avec u, v, w continues telles que u ne s'annule pas sur I, on peut la réécrire

$$y'(x) + \frac{v(x)}{u(x)}y(x) = \frac{w(x)}{u(x)}$$

et en déduire que $(E.D.)$ a une solution.

Existence de solutions

Théorème

Si a et b sont des fonctions continues sur I, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule.

Ensemble des solutions

Théorème

Considérons une équation différentielle $(E.D.)$ sur un intervalle I et son équation homogène associée $(E.H.)$. Soit y_0 une solution de $(E.D.)$. Alors y est solution de $(E.D.)$ si et seulement si $y - y_0$ est solution de $(E.H.)$

Conséquence

L'ensemble des solutions de $(E.D.)$ est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$y(x) = y_0(x) + z(x)$$

où :

- $y_0(x)$ est une solution particulière de $(E.D.)$,
- $z(x)$ décrit l'ensemble des solutions de $(E.H.)$.

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1
- Définitions
- Ensemble des solutions
- Méthodes de résolution
- Exercices

Méthode de la solution particulière

Méthode

Cette méthode découle directement du théorème précédent. Elle consiste à

- Résoudre l'équation homogène associée ($E.H.$)
- Trouver une solution particulière

Solutions d'une équation homogène à coefficients constants

Définitions

- Une **equation homogène à coefficients constants** est une équation différentielle de la forme :

$$\begin{aligned} uy'(x) + vy(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow y' &= ay(x) \end{aligned} \tag{1}$$

où $a = -\frac{v}{u}$ est une constante avec $(u, v) \in (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$.

Solutions d'une équation homogène à coefficients constants

Proposition

L'ensemble des solutions est donné par : $y(x) = Ke^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Démonstration

$$\begin{aligned} y'(x) = ay(x) &\Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = a \\ &\Leftrightarrow \ln|y(x)| = ax + k \\ &\Leftrightarrow |y(x)| = e^{ax+k} = e^{ax} \times e^{k} \\ &\Leftrightarrow y(x) = Ke^{ax} \end{aligned}$$

Solutions d'une équation homogène

Définitions

- Une **equation homogène** est une équation différentielle de la forme :

$$u(x)y'(x) + v(x)y(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = a(x)y(x)$$

où $a(x) = -\frac{v(x)}{u(x)}$ est une fonction réelle continue sur I.

Solutions d'une équation homogène

Proposition

L'ensemble des solutions est donné par : $y(x) = Ke^{A(x)}$ où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$ et $K \in \mathbb{R}$.

Démonstration

$$\begin{aligned} y'(x) = a(x)y(x) &\Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = a(x) \\ &\Leftrightarrow \ln|y(x)| = A(x) + k \\ &\Leftrightarrow |y(x)| = e^{A(x)+k} = e^{A(x)} \times e^{k} \\ &\Leftrightarrow y(x) = Ke^{A(x)} \end{aligned}$$

Méthode de la solution particulière

Equation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

On appelle **equation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme :

$$uy'(x) + vy(x) = w$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = ay(x) + b$$

où $a = -\frac{v}{u}$, $b = \frac{w}{u}$ avec $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Proposition

Une solution particulière est $y(x) = -\frac{b}{a}$.

Méthode de la solution particulière

Corrolaire

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants de la forme $y' = ay + b$ est donné par :

$$y(x) = -\frac{b}{a} + Ke^{ax}$$

où $K \in \mathbb{R}$

Méthode de la solution particulière

Exemple 1 : équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Résoudre $5 - 2y' = 3y$ sur $\mathbb{R}$

Solutions

- $5 - 2y' = 3y \Leftrightarrow 2y' + 3y = 5 \Leftrightarrow y' + \frac{3}{2}y = \frac{5}{2}$
- Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$y(x) = \frac{5}{3} + Ke^{-\frac{3}{2}x}, K \in \mathbb{R}$$

Méthode de la solution particulière

Exemple 2 : équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants

Résoudre $2xy' - y = e^x(2x-1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $(E.D.)$

- L'équation homogène associée est : $2xy' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme : $Ke^{-A(x)} = Ke^{\frac{\ln x}{2}} = K\sqrt{x}, K \in \mathbb{R}$ où $A(x) = -\frac{\ln x}{2}$ est la primitive de $a(x) = -\frac{1}{2x}$.
- Posons $y(x) = e^x$. Alors $2xy'(x) - y(x) = 2xe^x - e^x = e^x(2x-1)$. Par conséquent, l'exponentielle est une solution particulière de $(E.D.)$
- Finalement, les solutions de $(E.D.)$ sont les fonctions de la forme $y(x) = e^x + K\sqrt{x}, K \in \mathbb{R}$

Méthode de la variation de la constante

Méthode

Cette méthode consiste à :

- Trouver une solution y_0 de $(E.H.)$
- Chercher les solutions de $(E.D.)$ sous la forme $y(x) = K(x)y_0(x)$. Alors :

$$\begin{aligned} & u(x)y'(x) + v(x)y(x) = w(x) \\ \Leftrightarrow\ & u(x)(K(x)y'(x) + K'(x)y(x)) + v(x)y(x) = w(x) \\ \Leftrightarrow\ & (u(x)y_0'(x) + v(x)y_0(x))K(x) + K'(x)u(x)y_0(x) = w(x) \\ \Leftrightarrow\ & K'(x)u(x)y_0(x) = w(x) \end{aligned}$$

On en déduit K' puis K puis y.

Méthode de la variation de la constante

Exemple 2 (suite)

Résoudre $2xy' - y = e^x(2x-1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $(E.D.)$

- Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme : $y(x) = K\sqrt{x}, K \in \mathbb{R}$ (voir diapositive 139)
- Posons $y(x) = K\sqrt{x}$. Alors y solution de $(E.D.)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} & 2x(K'(x)\sqrt{x} + K(x)\tfrac{1}{2\sqrt{x}}) - (K\sqrt{x}) = e^x(2x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^{3/2}K'(x) + K(x)\sqrt{x} - K(x)\sqrt{x} = e^x(2x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & K'(x) = \tfrac{e^x(2x-1)}{2x^{3/2}} = e^x x^{-1/2} + (-\tfrac{1}{2})e^x x^{-3/2} \\ \Leftrightarrow \quad & K(x) = e^x x^{-1/2} + C = \tfrac{e^x}{\sqrt{x}} + K \end{aligned}$$

- Les solutions de $(E.D.)$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}} + K\right)\sqrt{x} = e^x + K\sqrt{x}; K \in \mathbb{R}$$

Méthode de la variation de la constante

Exemple 3

Résoudre $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $(E.D.)$

- L'équation homogène associée est : $xy' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or :

$$\begin{aligned} xy'(x) + 2y(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x} \\ &\Leftrightarrow \ln|y(x)| = -2\ln|x| + k, k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y(x) = \frac{K}{x^2}, K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Posons $y(x) = \frac{K(x)}{x^2}$. Alors y est solution de $(E.D.)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} & x\frac{K'(x)x^2 - 2xK(x)}{x^4} + 2\frac{K(x)}{x^2} = \frac{x}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{K'(x)}{x} = \frac{x}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & K'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & K'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & K(x) = x - arctan(x) + C \end{aligned}$$

Méthode de la variation de la constante

Exemple 3 (suite)

- Les solutions de $(E.D.)$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = \frac{x - arctan(x) + C}{x^2}, C \in \mathbb{R}$$

1 Généralités sur les fonctions

2 Limites

3 Continuité et dérivabilité

4 Intégrales

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 1
- Définitions
- Ensemble des solutions
- Méthodes de résolution
- Exercices

Exercices

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant les intervalles sur lesquels les solutions sont définies :

1. $y(x) = 3y'(x)$
2. $xy'(x) + y(x) = 2x$
3. $y'(x) = 2e^x - y(x)$
4. $y'(x) + y(x) = \cos x$

Exercices - Solutions

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant les intervalles sur lesquels les solutions sont définies :

1. $y(x) = Ke^{\frac{x}{3}}; K \in \mathbb{R}$
2. $y(x) = x + \frac{K}{x}; K \in \mathbb{R}$
3. $y(x) = e^x + Ce^{-x}; C \in \mathbb{R}$
4. $y(x) = (e^x \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} + C)e^{-x}; C \in \mathbb{R}$