Cours du 9 mars :

- Notion du gradient d’un champ scalaire et son interprétation.

- Opérateur Nabla en coordonnées cartésiennes et polaires.

- Circulations d’un champ vectoriel et d’un gradient de champ scalaire. Notion d’un champ vectoriel qui dérive d’un champ scalaire

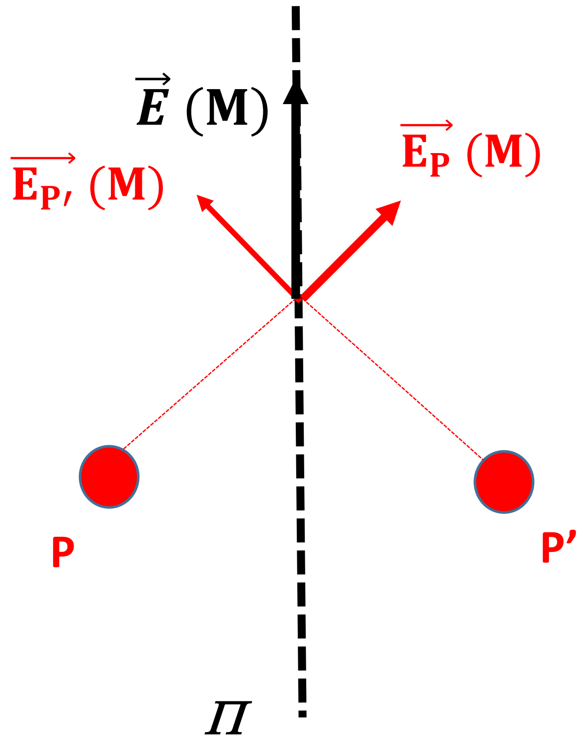
- Loi de Coulomb (savoir l’écrire correctement, introduire le bon vecteur unitaire et notion de forces attractives et répulsives). Principe de superposition

- Champ électrique, force électrique et principe de superposition.

3. Etude des symétries/antisymétries des distributions de charges

a/ Symétrie axiale:

Soient deux charges (ici > 0) situées aux points P et P' et symétriques par rapport à un plan Π.

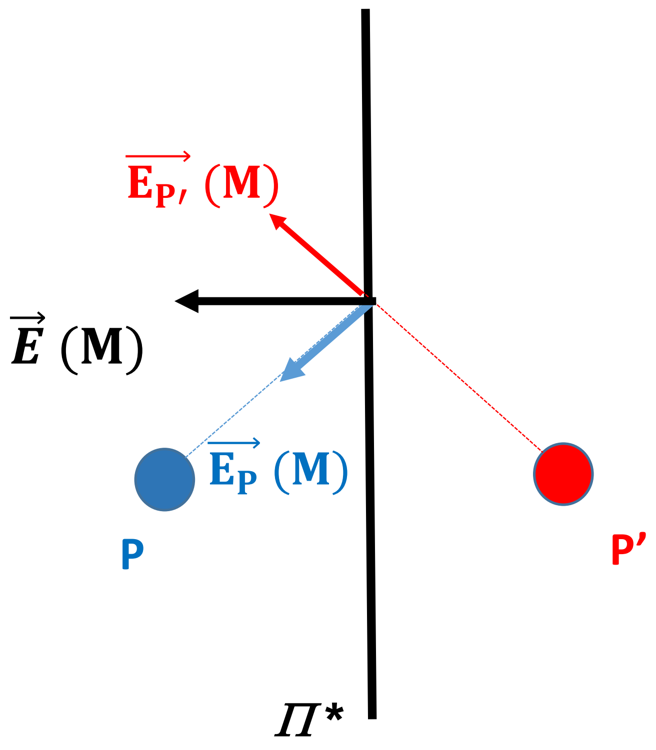


$$\forall\, M \in \Pi \qquad \vec{E}\,(M) \in \Pi$$

Pour tout point M appartenant à Π, axe de symétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique créé par cette distribution au point M sera porté par Π.

b/ Antisymétrie axiale:

Si la distribution de charges électriques admet un axe d'antisymétrie Π^*



$\forall$ M $\in \Pi^*$ $\vec{E}$ (M) $\perp \Pi^*$

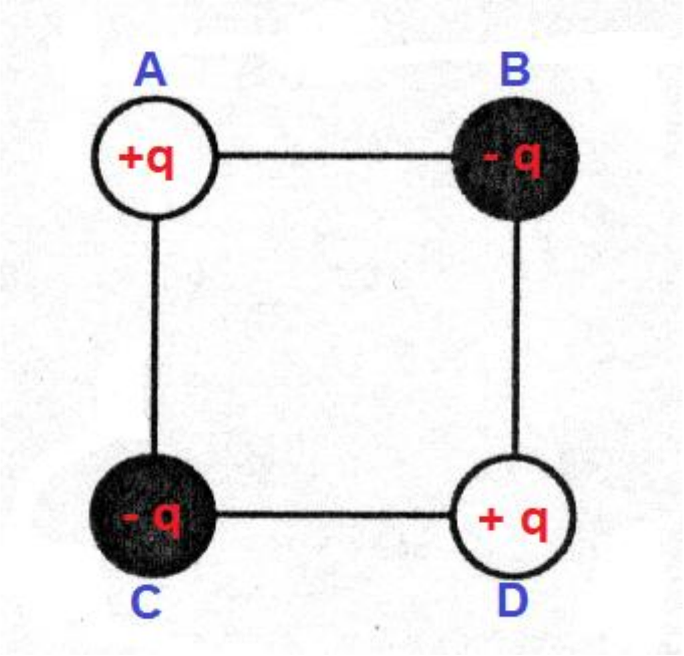
Pour tout point M appartenant à Π^*, axe d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique créé par cette distribution au point M sera perpendiculaire à Π^*.

c/ Conséquences:

Si l'on souhaite déterminer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges électriques en un point M.

- L'étude des **symétrie et antisymétrie de la distribution de charges** nous permet de prévoir la **direction de $\vec{E}$** .

Exemples 1



Les deux diagonales du carré sont des axes de symétries. En chacun de leur point, le champ sera le long de l'axe.

↓

Au point O, centre du carré et intersection des deux axes de symétries le champ est nul (car appartenant à chacun des deux axes à la fois).

Les deux axes vertical et horizontal passant par le milieu des cotés du carré sont des axes d'antisymétries. En chacun de leurs points, le champ sera perpendiculaire à l'axe.

↓

Au point O, centre du carré et intersection des deux axes d'antisymétrie le champ est nul (car perpendiculaire aux deux à la fois).

4. Potentiel Electrostatique

En tout point M on définit le potentiel électrique créé par une charge q située au point O par:

$$\boxed{V(M) = \frac{k\,q}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} = \frac{k\,q}{r}}$$

Le potentiel électrostatique est une grandeur scalaire qui définit l'état électrique d'un point de l'espace.

Le potentiel électrostatique est intimement lié au champ électrostatique.

Le potentiel électrostatique permet de caractériser le champ électrostatique et est parfois plus simple à exploiter.

5. Relation entre le champ $\vec{E}$ et le potentiel V

Champ électrique $\vec{E}$ et potentiel électrique V sont reliés par:

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = -\vec{\nabla}\, V}$$

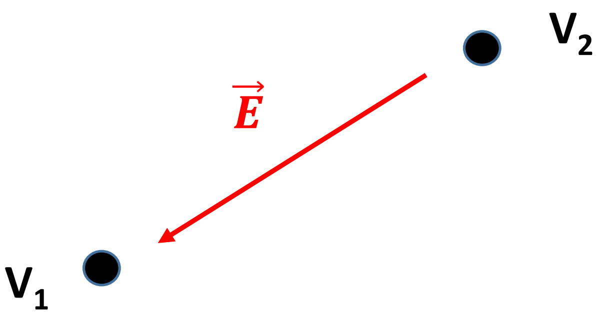
$\vec{E}$ est un **champ vectoriel**

V est un **champ scalaire**

$\vec{\nabla}$ est l'opérateur **vectoriel** Nabla

Le champ électrique $\vec{E}$ est orienté dans le sens inverse de l'accroissement du potentiel V.

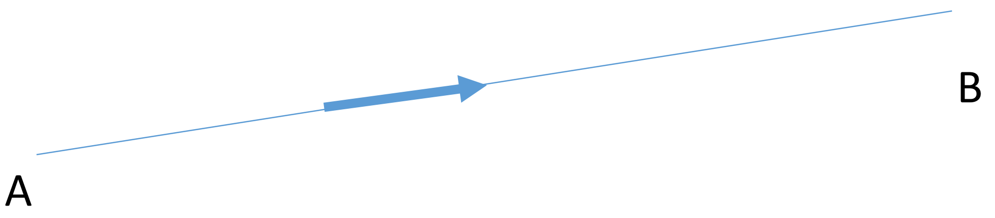
Exemple



$V_1 < V_2$

5. Relation entre le champ $\vec{E}$ et le potentiel V (Démonstration)

$$\vec{E}(M).\overrightarrow{dr} = \frac{k\,q}{r^2}\ \vec{u}_r\ .\,dr\,\vec{u}_r = \frac{k\,q}{r^2}\ dr = k\,q\,\frac{dr}{r^2}$$



$Or\quad \frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right)$ $\Rightarrow$ $\vec{E}(M).\overrightarrow{dr} = k\,q\,\frac{dr}{r^2} = \mathrm{kq\ d}\left(-\frac{1}{r}\right) = -\mathrm{d}\left(\frac{kq}{r}\right)$

Or $\quad \frac{k\,q}{r} = V(M)$ $\Rightarrow$ $\vec{E}(M).\overrightarrow{dr} = -\mathrm{d\,V}$

En utilisant la définition intrinsèque du gradient: $\quad dV = \vec{\nabla}\,V\,.\,d\vec{r} \qquad \vec{E}(M).\overrightarrow{dr} = -\mathrm{d\,V} = -\vec{\nabla}\,V\,.\,d\vec{r}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\,V}$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ se réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow$$

Connaissant V on peut déterminer les composantes du champ électrique.
On dit que $\vec{E}$ dérive du potentiel V

Inversement, connaissant les composantes de $\vec{E}$, on peut déterminer V en résolvant:

$$V = -\int E_x\, dx = -\int E_y\, dy = -\int E_z\, dz$$

Unités dans le système international (S.I.)

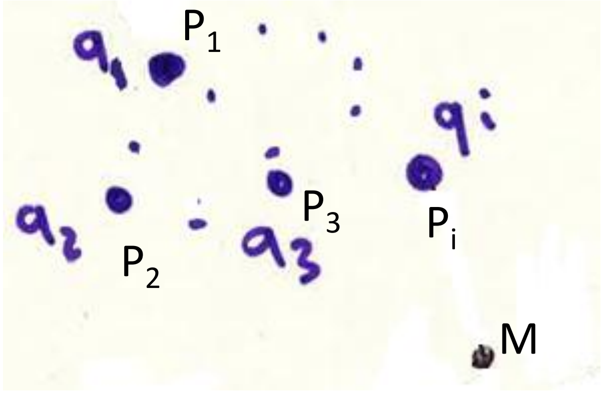
Le **potentiel** V s'exprime en Volts on notera **V**

Le **champ électrique** $\|\vec{E}\|$ s'exprime **V.m^{-1}**

N.B: F = q.E => E = F/q E peut aussi s'exprimer en N.C^{-1}, mais en général on utilise V.m^{-1}

6. Potentiel électrostatique d'une distribution discrète de charges

On considère un ensemble de N charges q_i situées aux points P_i au voisinage d'un point M



On a vu que $\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E_i}\,(M)$

Or chaque charge ponctuelle q_i crée un potentiel électrostatique $V_i(M) = \dfrac{k\, q_i}{\left\|\overrightarrow{P_i M}\right\|}$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V = \sum_i \vec{E_i}\,(M) = -\sum_i \overrightarrow{grad}\, V_i(M)$$

$$-\,\overrightarrow{grad}\, V = -\sum_i \overrightarrow{grad}\, V_i(M) = -\,\overrightarrow{grad}\,\sum_i V_i(M)$$

$$\boxed{V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i\,(M) = \sum_{i=1}^{N} k\,\frac{q_i}{\left\|\overrightarrow{P_i M}\right\|}}$$

Encore une fois le principe de superposition !

7. Notion d'énergie potentielle électrostatique

On considère un point M portant une charge q dans une région où règne un champ $\vec{E}$

M sera soumis à une force électrostatique $\vec{F}(M) = q\vec{E}(M) = -q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,qV$

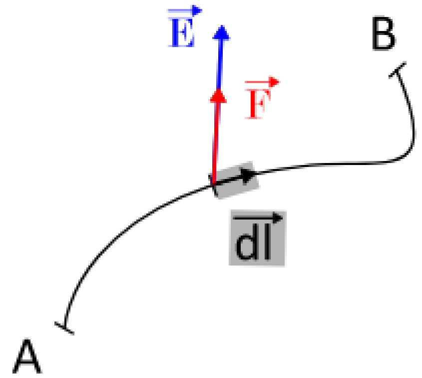
On définit l'énergie potentielle de la charge q placée en M par: $\boxed{\mathcal{E}_p = q\,V(M)}$

- ✓ Le potentiel V est alors l'énergie potentielle par unité de charge

La force subie par q en M est donc $\boxed{\vec{F}(M) = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p}$

- ✓ La force électrostatique dérive d'une énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p$.

Si q >0 se déplace entre les points A et B on écrit:



$$dW_{AB} = \vec{F} \, . \, \overrightarrow{dl} \quad = q \, \vec{E} . \overrightarrow{dl}$$

Or $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ On écrit $\vec{E} . \overrightarrow{dl} = - \, dV$

$$\Rightarrow \quad W_{AB} = \int_A^B -q \, dV = -q \int_A^B dV = -q \left(V(B) - V(A) \right) = q \left(V(A) - V(B) \right) = \mathscr{E}_p(A) - \mathscr{E}_p(B)$$

$\Rightarrow$ Le travail de la force de coulomb ne dépend pas du chemin suivi
la force de coulomb est conservative
elle dérive d'une énergie potentielle

Unités:
- $\mathscr{E}_p$ s'exprime en Joules **(J)**
- **q** la charge électrique en Coulomb **(C)**
- **V** potentiel électrique donné en Volts **(V)**
- ***E*** champ électrique donné en Volts $(\mathbf{V}.\boldsymbol{m}^{-1})$

8. Énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles

Soient deux charges q_1 et q_2 situées respectivement aux points M_1 et M_2 .

On définit l'énergie potentielle d'interaction entre les charges q_1 et q_2 par:

$$\boxed{\mathcal{E}_{P12} = k\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2}}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_P > 0 \ \rightarrow interaction\ répulsive \\ \varepsilon_p < 0 \ \rightarrow interaction\ attractive \\ \varepsilon_P = 0 \ \rightarrow pas\ d'interaction \end{cases}$$

- ✓ $V_1(M_2)$ est le potentiel créé par q_1 au point M_2.

$$V_1(M_2) = \frac{k\,q_1}{M_1 M_2}$$

- ✓ $V_2(M_1)$ est le potentiel créé par q_2 au point M_1.

$$V_2(M_1) = \frac{k\,q_2}{M_2 M_1}$$

On peut réécrire cette énergie sous la forme:

$$\mathcal{E}_{P12} = q_1\ V_2(M_1) = q_2\ V_1(M_2) \quad = \quad \frac{1}{2}\left[q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)\right] \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\mathcal{E}_{p1} + \mathcal{E}_{p2}\right]$$

Avec $\mathcal{E}_{p1} = q_1\ V_2(M_1)$ $\qquad$ $\mathcal{E}_{p2} = q_2\ V_1(M_2)$

$\mathcal{E}_{p1}$ *et* $\mathcal{E}_{p2}$ *sont les énergies potentielles électrostatiques en* M_1 *et* M_2

✓ $\mathcal{E}_{P12}$, $\mathcal{E}_{P1}$ et $\mathcal{E}_{P2}$ s′expriment en Joules **(J)** ou en électronVolt ***(eV)***

1 eV = 1.6 10^{-19} J = l’énergie acquise par un électron soumis à un potentiel de 1V

8. Lignes de champ et surfaces équipotentielles

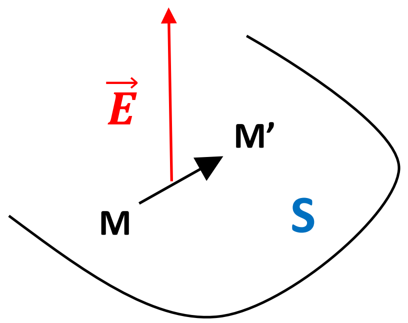
Une surface équipotentielle est l'ensemble des points où le potentiel scalaire V prend une même valeur.

Les lignes de champ électrique $\vec{E}$ sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles

Dem: Si M et M’ sont deux points d’une surface équipotentielle **S** portée au potentiel V_0 on a alors $V(M) = V(M') = V_0$.

On a alors $dV = V(M') - V(M) = 0$ or $dV = -\vec{E}(M).\overrightarrow{MM'}$

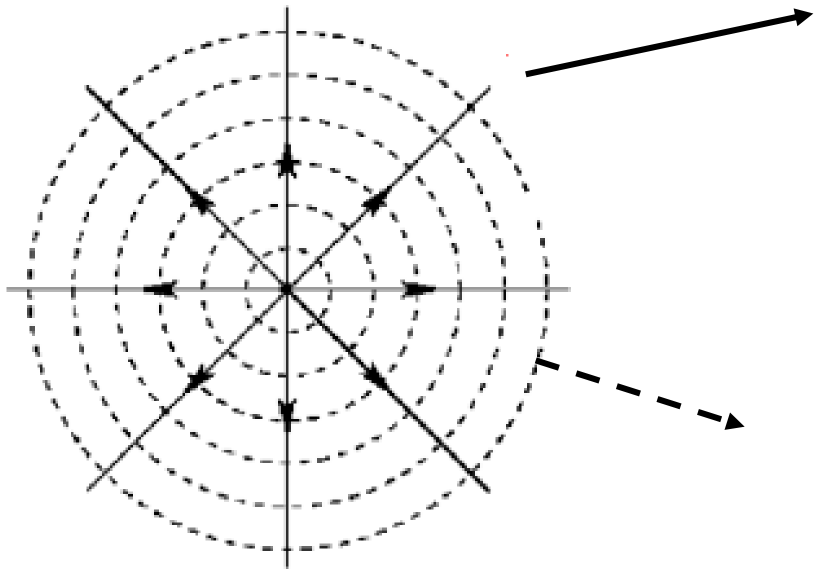
$\Longrightarrow$ $\vec{E}(M) \perp \overrightarrow{MM'}$



Exple: Soit une charge ponctuelle q >0 au point O, en tout point M distant de r de O elle crée un potentiel $V = \frac{kq}{r}$

Les surfaces équipotentielles sont définies par r = cste $\rightarrow$ sphères concentriques de centre 0

Dans un plan, les surfaces équipotentielles sont des cercles concentriques de centre 0



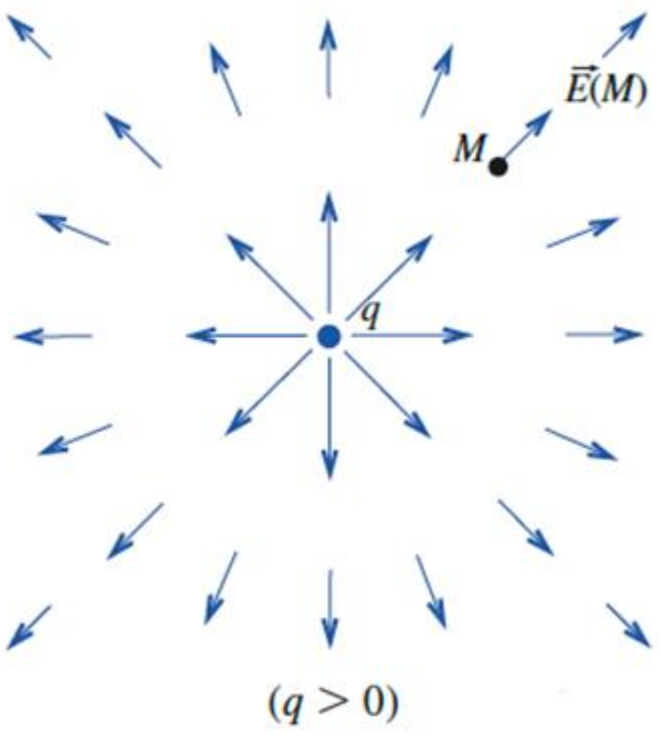
Lignes de champ

Surfaces équipotentielles

- **Les lignes de champ électrique $\vec{E}$ sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles**
- **Le champ électrique est dirigé de l'équipotentielle la plus élevée vers la plus faible.**

Le champ électrique $\vec{E}$ est orienté dans le sens inverse de l'accroissement du potentiel V.

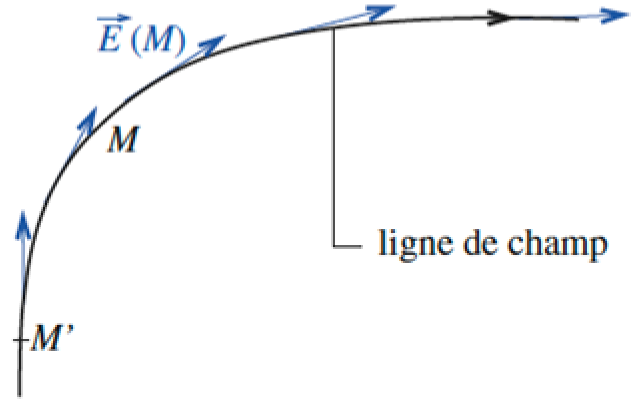
Lignes de champ radiales d'une charge ponctuelle



Le champ est continuellement tangent à des courbes appelées **lignes de champ**

En tout point des lignes de champ on a $\overrightarrow{dl}\ //\ \vec{E}$ on écrit alors:

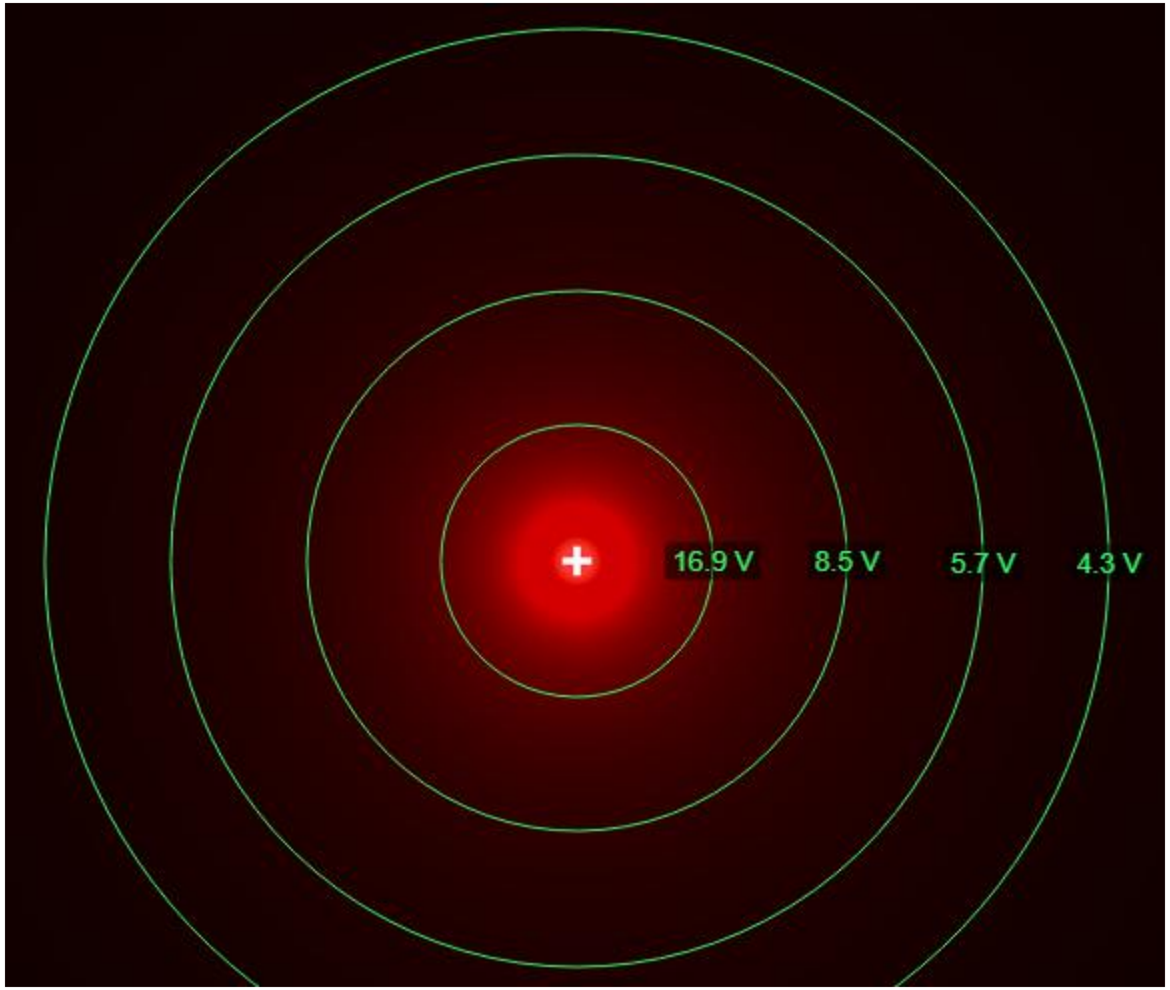
$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{dl}} \wedge \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}}$$



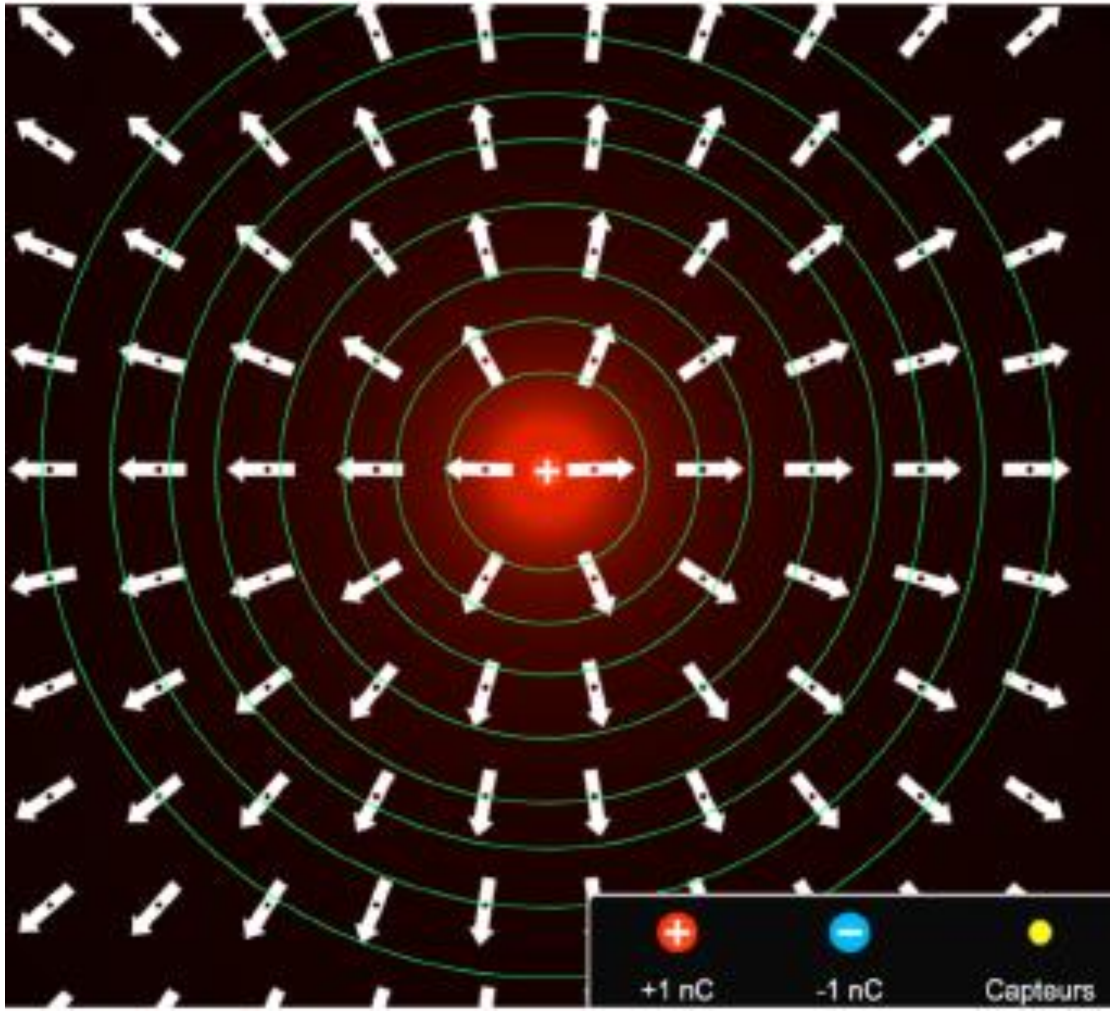
Lignes de champ et champ électrique sont orientés dans le même sens.

https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_fr.html

Surfaces équipotentielles d’une charge > 0

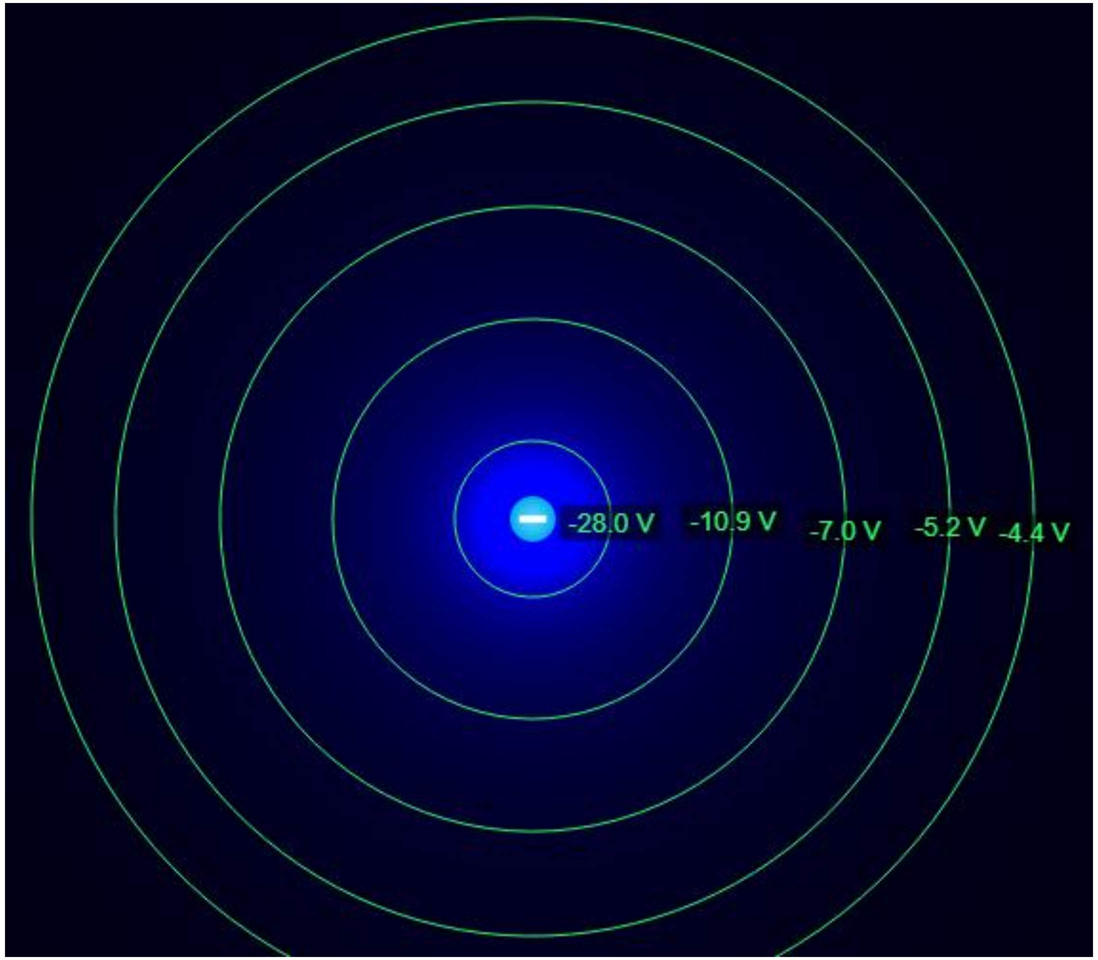


Surfaces équipotentielles & lignes de champ d’une charge >0



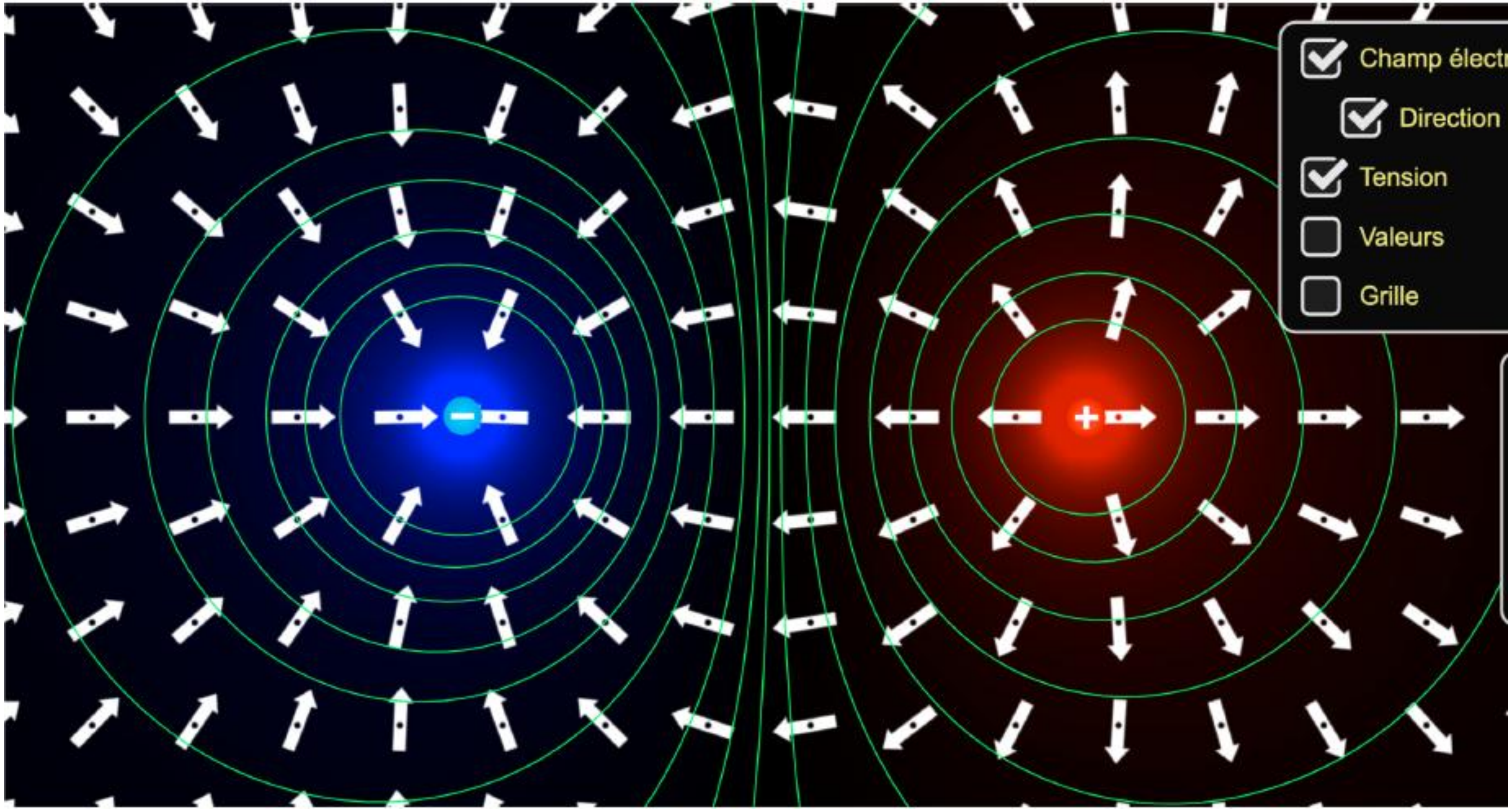
https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_fr.html

Surfaces équipotentielles d'une charge < 0



Surfaces équipotentielles & lignes de champ d'une charge < 0

Lignes de champ et surfaces équipotentielles pour une charge positive près d'une charge négative



A retenir

L'expression de la force d'interaction coulombienne entre deux charges électriques q_A et q_B situées aux points A et B distants de r, est donnée par.

$$\boxed{\overrightarrow{F_{A/B}} = \overrightarrow{F_A(B)} = k\,\frac{q_A\, q_B}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\,\overrightarrow{u_{AB}}}$$

$$\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{A/B}} = kq_A\, q_B\,\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}}$$

$$k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9.10^9\ SI$$

Le champ électrique créé en tout point M par une charge placée en O est donné par:

$$\overrightarrow{E(M)} = \frac{kq}{||OM||^2}\overrightarrow{u_{OM}} = kq\,\frac{\overrightarrow{OM}}{||OM||^3}$$

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E(M)} = \frac{kq}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$$

Le potentiel électrique créé en tout point M par une charge placée en O est donné par:

$$\boxed{V(M) = \frac{k\,q}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{k\,q}{r}}$$

$$\Rightarrow \quad V = \|\vec{E}\|\,r$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\,V}$$

L'expression de la force électrostatique qui s'exerce sur une charge q située en un point M dans une région où règne un champ $\vec{\mathrm{E}}$

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}} = q\vec{\mathrm{E}}\ (M)}$$

L'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q située dans une région où règne un potentiel V

$$\boxed{\mathcal{E}_p = q\,V(M)}$$

L'expression de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 situées respectivement aux points M_1 et M_2

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{P12}} = \mathrm{k}\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2}}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_P > 0 \rightarrow interaction\ répulsive \\ \varepsilon_p < 0 \rightarrow interaction\ attractive \\ \varepsilon_P = 0 \rightarrow pas\ d'interaction \end{cases}$$

Unités à retenir

Une charge électrique → **C**

La force de Coulomb → **N**

Le champ électrique → V/m = $\mathbf{V.m^{-1}}$ ou N/C = $\mathbf{N.C^{-1}}$

Le potentiel électrique → **V**

L’énergie électrostatique → **J** ou **eV** avec 1eV = $1.6\ 10^{-19}$ J