

Cours du 3 mars :

- Rappels sur les dérivées de fonctions à une seule variable, les dérivées partielles des fonctions à plusieurs variables ainsi que leurs différentielles .
- Rappels sur les vecteurs et les différentes opérations sur les vecteurs et introduction du produit vectoriel.
- Rappels et discussion des différents systèmes de coordonnées, les notions de déplacements élémentaires. Introduction ou rappels sur les coordonnées polaires et cylindro-polaires.
- Notions de champs scalaires et vectoriels en physique.

Pour vous entraîner, les feuilles « dérivées totales et partielles de fonctions » et « Manipulation de vecteurs » sont disponibles et accessibles sur wims.

2/ Gradient d'un champ scalaire $f(M)$

En physique et en analyse vectorielle on définit, en coordonnées cartésiennes, le gradient d'un champ scalaire $f(M) = f(x, y, z)$ par:

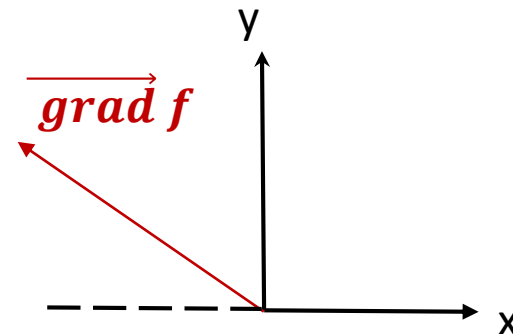
$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \overrightarrow{u}_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \overrightarrow{u}_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \overrightarrow{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

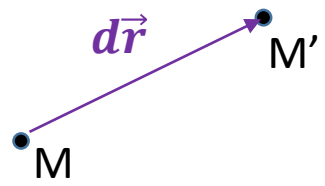
Exemple: $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ avec α, β et γ sont des constantes.

⇒ $\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y) = \alpha \overrightarrow{u}_x + \beta \overrightarrow{u}_y$

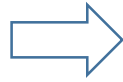
Si $\alpha < 0$ et $\beta > 0$



Le gradient est donc un vecteur qui indique comment la grandeur physique évolue dans l'espace.




$$df = f(M') - f(M) = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$



df s'appelle la différentielle, elle s'écrit aussi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Or $\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ et $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$  $\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$



$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r}$$

3/ Opérateur différentiel Nabla (noté $\vec{\nabla}$)

C'est un opérateur vectoriel dont les composantes constituent des opérations de dérivées partielles.

➤ En coordonnées cartésiennes il s'écrit sous la forme: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$f(x, y, z) = 35 x^2 + 20 y^3 + 3z$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \vec{u}_z = 70 x \vec{u}_x + 60 y^2 \vec{u}_y + 3 \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 70 x \\ 60 y^2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

➤ En coordonnées cylindriques il s'écrit sous la forme:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$f(r, \theta, z) = 3 r^2 \cos \theta + 5 z \sin \theta$$

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$= 6 r \cos \theta \vec{u}_r + \frac{1}{r} (-3 r^2 \sin \theta + 5 z \cos \theta) \vec{u}_\theta + 5 \sin \theta \vec{u}_z$$

Nabla peut être appliqué à des champs scalaires ou champs vectoriels, ainsi:

✓ Si f est un champ scalaire alors, on parle de **gradient** :

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}} f$$

✓ Si \vec{A} est un champ vectoriel alors on peut définir deux opérations entre \vec{A} et $\vec{\nabla}$:

□ **La divergence**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

□ **Le rotationnel**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

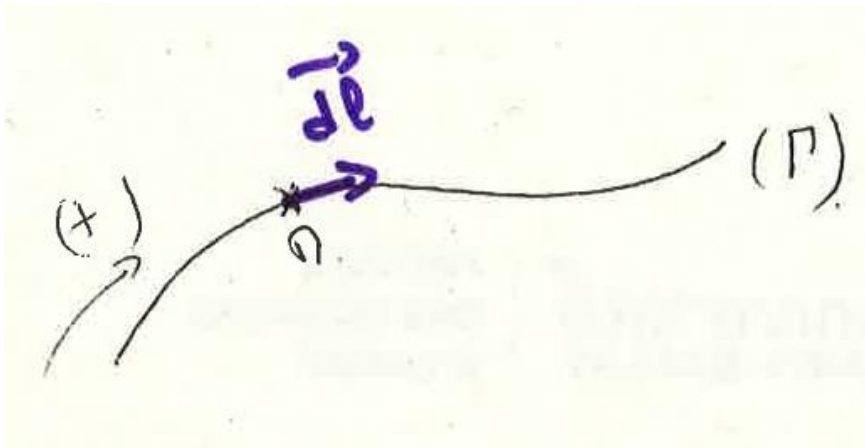
On peut facilement montrer que: $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0}$

Pour le cours de cette année nous n'utiliserons que la notion du gradient

3/ Circulation d'un champ vectoriel statique $\vec{A}(M)$

3.1/ Définition: La circulation de $\vec{A}(M)$ le long d'une courbe Γ orientée est l'intégrale.

$$C = \int_{\Gamma} \vec{A}(M) \cdot d\vec{l}$$



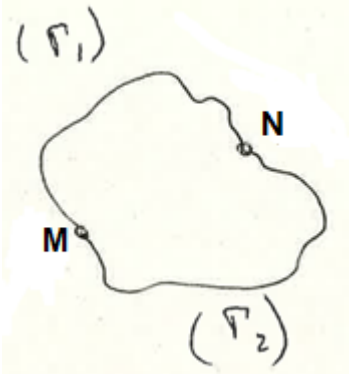
$d\vec{l}$ est le vecteur déplacement élémentaire tangent en M à Γ . Il est orienté dans le sens positif

Si le contour Γ est fermé alors on écrit:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(M) \cdot d\vec{l}$$

3.2/ Circulation conservative

Le champ $\vec{A}(M)$ est dit à « circulation conservative » si la circulation de \vec{A} sur tout contour fermé est nulle.



$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\implies \int_{M(\Gamma_1)}^N \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{N(\Gamma_2)}^M \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{M(\Gamma_1)}^N \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{M(\Gamma_2)}^N \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \implies \int_{M(\Gamma_1)}^N \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{M(\Gamma_2)}^N \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



La circulation de \vec{A} entre deux points M et N est indépendante du chemin suivi.

3.3/ Circulation du gradient d'un champ scalaire f

$$\int_M^N \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r} = \int_M^N \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_M^N df = f(N) - f(M)$$

La circulation de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ entre deux points M et N est la variation de f entre ces deux points

$$\oint \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0$$

✓ Si on pose $\vec{A} = -\vec{\nabla} f$ on dit alors que \vec{A} qui dérive d'un champ de gradient f est à circulation conservative

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} f$$

$$A_x = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad A_y = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad A_z = -\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (-\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

En conséquence:

Pour montrer que \vec{A} dérive d'un champ de gradient il suffit de montrer que ses dérivées croisées sont égales:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

En électrostatique nous verrons que:

- ❖ le champ électrique \vec{E} dérive d'un potentiel V . On écrit $\vec{E} = - \overrightarrow{grad} V = - \vec{\nabla} V$
- ❖ la circulation de \vec{E} entre deux points A et B est alors la variation du potentiel V entre ces deux points.

Champ et potentiel électrostatiques

Electrostatique = Etude des interactions électriques entre **charges immobiles**.

L'électrostatique se base sur la **loi de Coulomb** et le **principe de superposition**.

Charge électrique et force électrostatique

1. Propriétés de la charge électrique

1-1 Grandeur algébrique:

- La charge électrique, notée q est une grandeur scalaire:
 $q > 0$ ou $q < 0$ ($q = 0$ pour un milieu neutre)
- Répulsion entre A et B si $q_A \cdot q_B > 0$ (q_A et q_B mêmes signes)
- Attraction entre A et B si $q_A \cdot q_B < 0$ (q_A et q_B signes opposés)
- Un atome = un noyau chargé positivement (protons) et un nuage électronique contrebalance la charge du noyau: Un atome est neutre
- Ions:
 - cations de charge > 0 = un atome privé d'un ou plusieurs électrons.
 - anions de charge < 0 = un atome qui a capturé un ou plusieurs électrons.

1-2 Quantification:

- Il existe une charge élémentaire notée e telle que: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (C : Coulomb)
- Toute charge q est multiple de e
- Pour un électron $q_{e^-} = -e$
- Pour un proton $q_p = +e$

1-3 Conservation de la charge

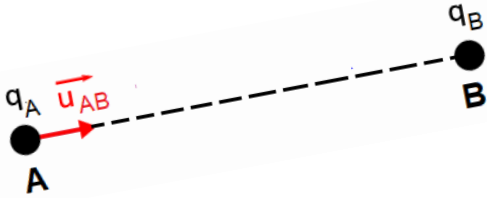
- La charge d'un système isolé se conserve: Elle ne peut être créée ni détruite. Elle se transfère d'un corps à un autre.
- Transfert de charges → Electrification, exemple par frottements



© 1988 Fundamental Photographs

2. La loi de Coulomb

Énoncée en 1785 par Charles Augustin Coulomb, elle décrit l'interaction entre deux charges électriques q_A et q_B situées aux points A et B.



$$\vec{F}_{q_A/q_B} = \vec{F}_{q_A}(q_B) = k \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_{AB} = k q_A q_B \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3}$$

$r = \|\vec{AB}\|$ $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ est un vecteur unitaire colinéaire à \vec{AB} et dirigé de A vers B

k est la constante de Coulomb

❖ Dans le vide $k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$ avec ϵ_0 est la permittivité du vide = $8,82 \cdot 10^{-12}$ F. m⁻¹ (F = Farad)



$$k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ F}^{-1} \text{ m} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$

❖ Dans un milieu quelconque $k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r}$ où ϵ_r la permittivité relative

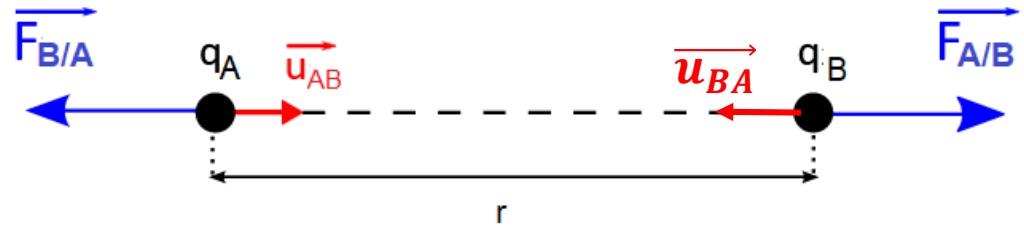
Les valeurs de ϵ_r pour les différents milieux sont connues et tabulées

→

$$\vec{F}_{q_B/q_A} = k \frac{q_B q_A}{r^2} \vec{u}_{BA} = k q_B q_A \frac{\vec{BA}}{||\vec{BA}||^3} = k q_A q_B \frac{(-\vec{AB})}{||\vec{AB}||^3} = -\vec{F}_{q_A/q_B}$$

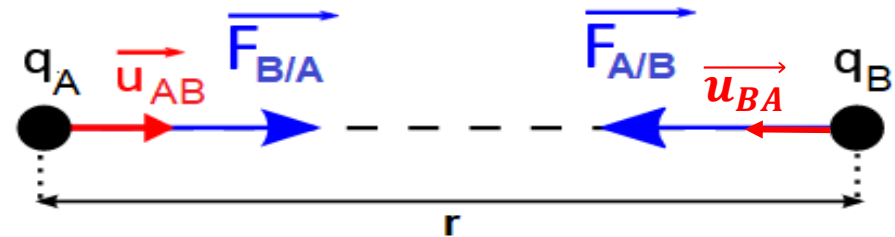
Cohérence avec la 3^{ème} loi de Newton: Principe de l'action et de la réaction= Interaction Coulombienne

Si $q_A q_B > 0$, q_A et q_B de même signe



Ce sont des forces répulsives

Si $q_A q_B < 0$, q_A et q_B de signes opposés



Ce sont des forces attractives

Force électrostatique vs force gravitationnelle

Soient deux électrons distants de r . La masse de l'électron est de $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, sa charge est de $1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

La force gravitationnelle qui s'exerce entre les deux électrons est donnée par:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \frac{m^2}{r^2} \quad \text{avec } G \sim 6,67 \times 10^{-11} \text{ S.I.}$$

La force électrostatique est donnée par:

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = k \frac{q^2}{r^2} \quad \text{avec } k = 9 \times 10^9 \text{ S.I.}$$

On a donc

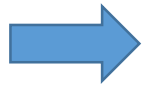
$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k q^2}{G m^2} \sim 4,2 \cdot 10^{42}$$



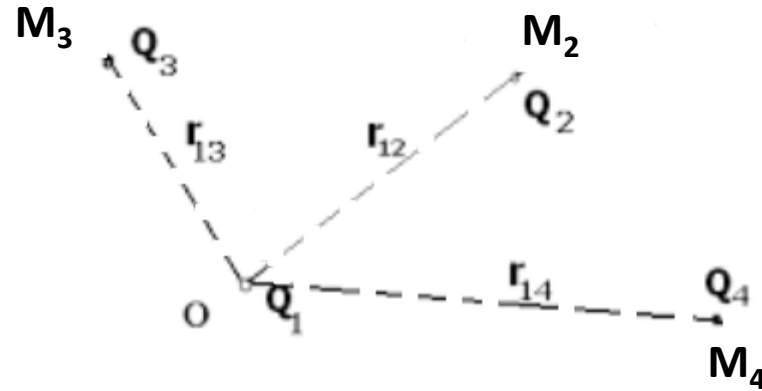
Pour des charges en présence, seule l'interaction électrostatique est à considérer.

3. Principe de superposition

L'interaction coulombienne entre deux charges est indépendante de la présence d'autres charges aux alentours.



La force F exercée sur une charge est la résultante (vectorielle) des forces de Coulomb exercées par chaque autre charge sur elle.

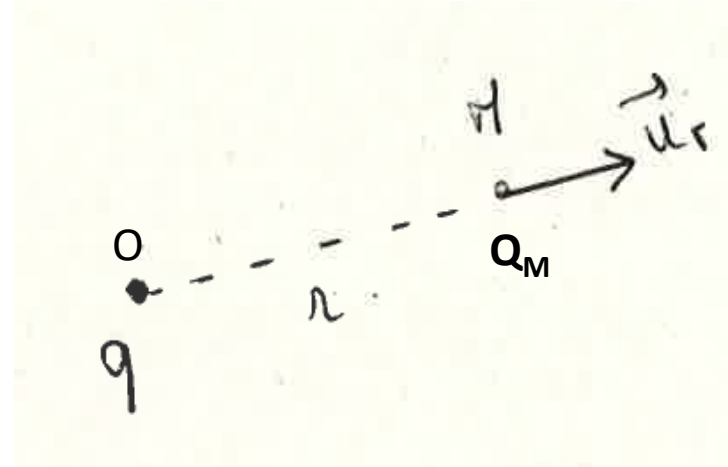


$$\vec{F}(Q_1) = \sum_{i=2}^4 k \frac{Q_i Q_1}{r_{1i}^3} \overrightarrow{M_i O}$$

Champ et potentiel électrostatiques

1. Champ créé par une charge ponctuelle

- On considère une charge q placée en O .



La loi de Coulomb

$$\vec{F}_{q/Q_M} = \vec{F}_q(Q_M) = k \frac{q Q_M}{r^2} \vec{u}_r = k \frac{q Q_M}{\|\vec{OM}\|^2} \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = kq Q_M \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$$

$$\vec{F}_{q/Q_M} = \vec{F}_q(Q_M) = Q_M \left(kq \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} \right)$$

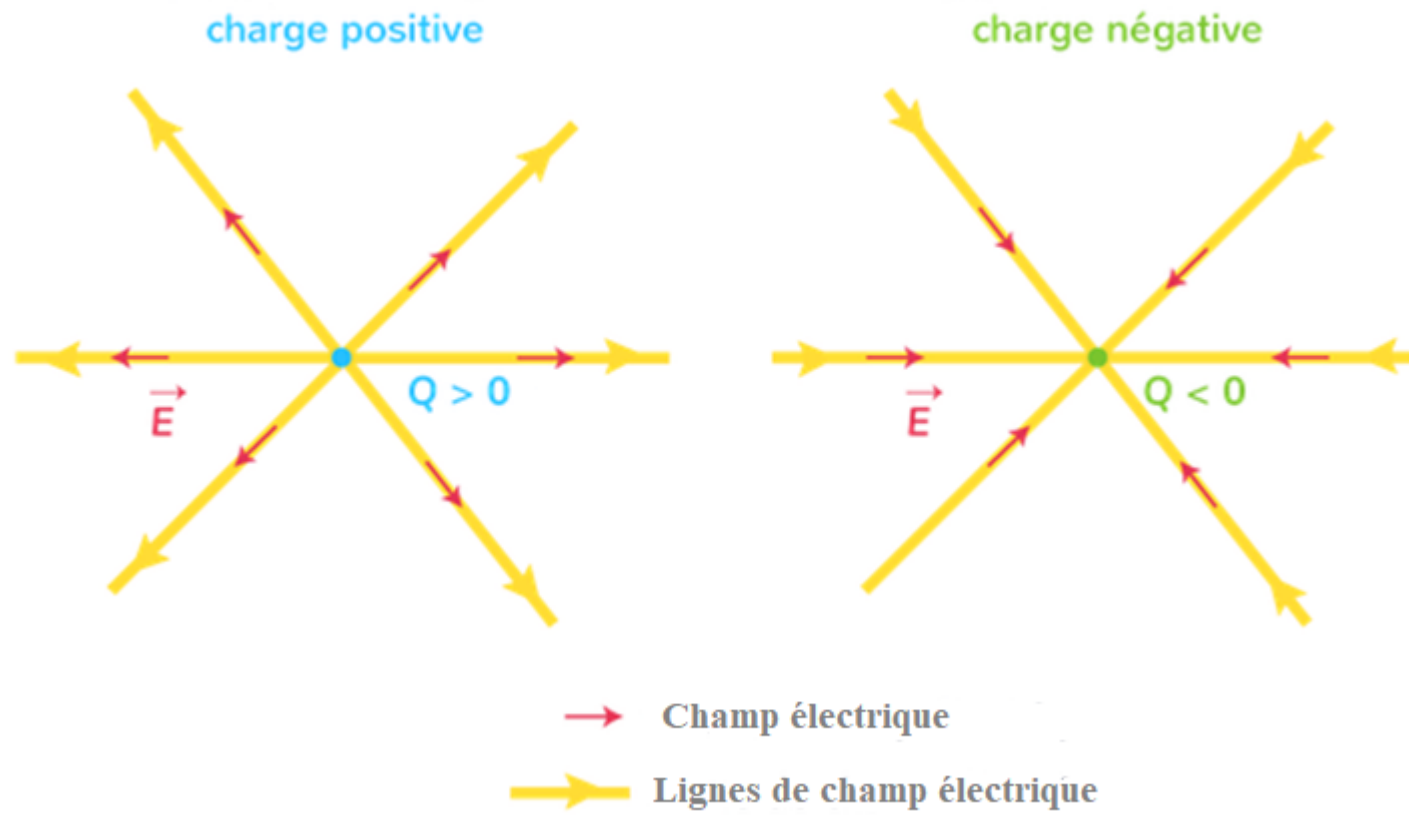
A partir de là, on définit un champ électrique créé au point M par la charge placée en O par:

$$\vec{E}_q(M) = kq \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} = kq \frac{\vec{u}_{OM}}{\|\vec{OM}\|^2} = k \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$



Si $q > 0$ alors \vec{E} et \vec{u}_{OM} même sens

Si $q < 0$ alors \vec{E} et \vec{u}_{OM} sens inverses

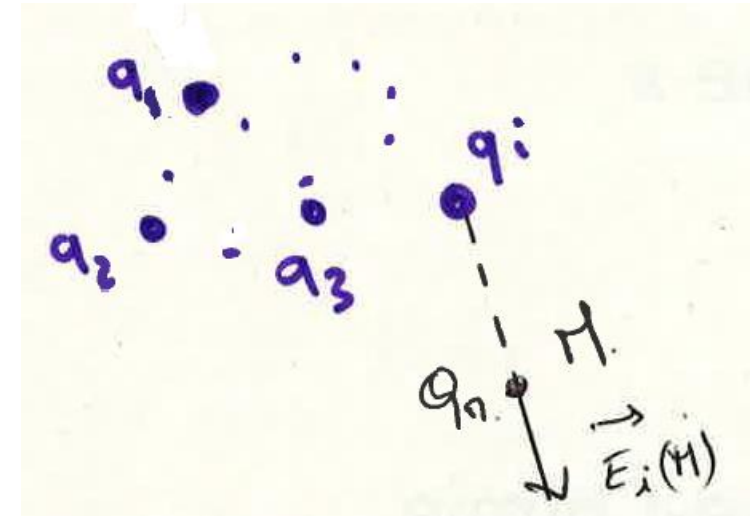


En présence du champ $\vec{E}(M)$ la charge Q_M sera soumise à la force électrique:

$$\vec{F} = Q_M \vec{E}(M)$$

2. Champ créé par une distribution discrète de charges

On considère N charges q_i situées aux points P_i ($i = 1$ à N)

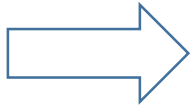


Chaque charge q_i exerce sur la charge Q_M (dite charge épreuve) une force

$$\vec{F}_{q_i/Q_M} = Q_M \vec{E}_{q_i}(M)$$

En appliquant le principe de superposition on obtient la force totale exercée sur Q_M

$$\vec{F}(Q_M) = \sum_{i=1}^N Q_M \vec{E}_{q_i}(M) = Q_M \sum_{i=1}^N \vec{E}_{q_i}(M) = Q_M \vec{E}(M)$$



Le champ électrique en un point M de l'espace voisin de la distribution discrète est égal à la somme des champs électriques créés par chaque charge de celle-ci.



Le principe de superposition s'applique aussi pour le champ électrique.

