Electromagnétisme I

Cours: **Zahia Djouadi** (zahia.djouadi@universite-paris-saclay.fr)

14h-15h30 : 23 février. Les 9, 16, 23 et 30 Mars, puis 13 avril 2025 15h45-17h15
Amphi: H1 Bât 333

Equipe pédagogique TDs

Eric Charron (G5-DDPC1 + PCST-R)
Zahia Djouadi (G6-DDPC2 +PCST-R)
Jean-Luc Raimbault (G7-DDGP)
Carole Vouille (LDD STAPS-SPI)

Note = 0,3 EE (Partiel) + 0,5 EEF (Examen) + 0,2 CC

EE= Epreuve écrite =Partiel : 30 Mars, 10h30-12h (12h30 TT)

EEF = Epreuve écrite finale = Examen : 7 mai 13h45-15h45 (16h10 TT)

CC = Contrôle continu = interros en TD ou cours (~ 15 à 30 min) et/ou Wims

TD1 le 12 mars, pour les créneaux/salles de TD se reporter à l'edt sur e-campus

https://wims.imo.universite-paris-saclay.fr/wims/

L'**électromagnétisme** = étude des interactions entre particules chargées électriquement, qu'elles soient au repos ou en mouvement.

La charge électrique = propriété fondamentale de la matière, c'est une grandeur scalaire (comme la masse)

L'interaction **électromagnétique** assure la cohésion des atomes et gouverne aussi les réactions chimiques.

Elle fait partie des 4 interactions fondamentales de la physique **(interaction nucléaire forte, interaction électromagnétique, interaction nucléaire faible, interaction gravitationnelle)** qui rendent compte de l'ensemble des phénomènes observables de la nature.

Interaction	Intensité relative	Portée (m)
Forte	1	~ 10^{-15}
Electromagnétique	10^{-3}	Infinie
Faible	10^{-13}	$< 10^{-18}$
Gravitation	10^{-38}	Infinie

N.B.: L'électromagnétisme fait appel à plusieurs notions mathématiques, vecteurs, dérivées de fonctions, différentielles, ..

→ **Cf TD 1**

Outils mathématiques

1/ Rappels sur les dérivées de fonctions et opérations sur les vecteurs

Dérivées de fonctions

✓ La dérivée d'une fonction donnée décrit l'accroissement de cette fonction au voisinage d'un point donné.

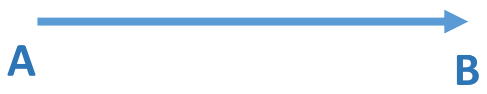
✓ Si la fonction ne dépend que d'une seule variable x, on écrit $f(x)$, on détermine une dérivée totale, $\frac{df\,(x)}{dx} = f'(x)$

- Si $f'(x) > 0$ alors on parle de fonction croissante.
- Si $f'(x) < 0$ alors on parle de fonction décroissante.
- Si $f'(x) = 0$ alors on parle de fonction constante

✓ Si la fonction dépend de plusieurs variables x, y et z, on écrit $f\,(x, y, z)$, on introduit la notion de dérivées partielles et on détermine la différentielle de la fonction par: $df(x, y, z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$

Rappels sur les vecteurs

Un vecteur est un segment de droite orienté, il est caractérisé par une direction, un sens et une norme.



On écrit $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

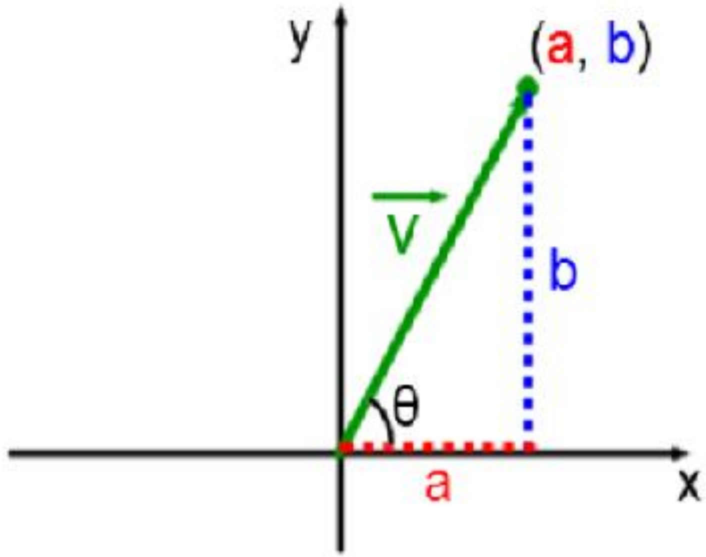
Un vecteur est caractérisé par ses composantes (a, b) qui représentent les projections du vecteur sur des axes de références

a représente la projection de $\vec{V}$ sur l'axe X

b représente la projection de $\vec{V}$ sur l'axe Y

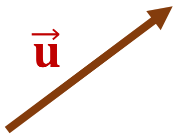
La norme du vecteur s'écrit alors $\|\vec{V}\| = V = \sqrt{a^2 + b^2}$

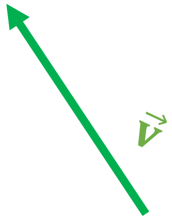
$a = V \times \cos\theta$ $\qquad$ $b = V \times \sin\theta$



Opérations sur les vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$





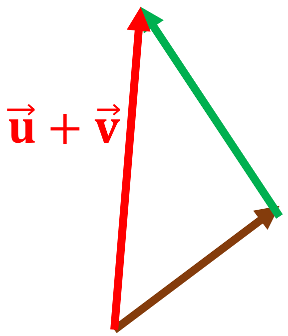
a/ Somme/Soustraction de deux vecteurs = vecteur

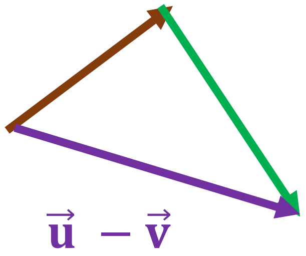
On écrit

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix}$$

On représente





b/ Produit scalaire de deux vecteurs = scalaire

$$\checkmark\ \vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = (u_x \times v_x) + (u_y \times v_y)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs = somme des produits des composantes deux à deux.

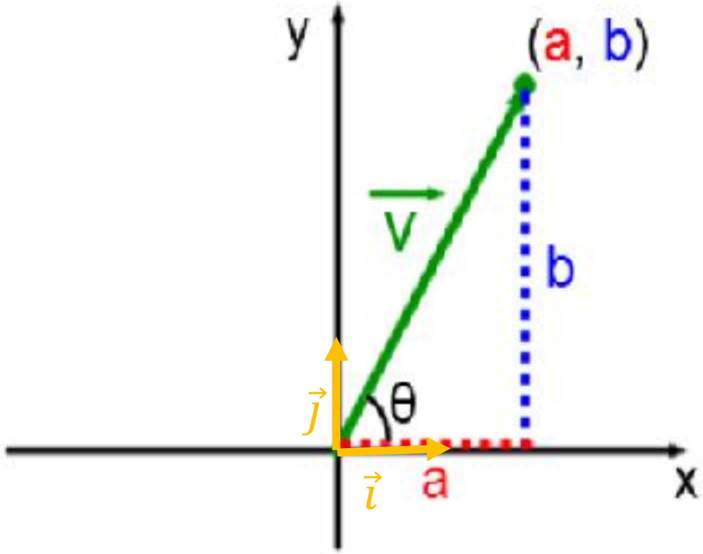
$$(u_x \times v_x) + (u_y \times v_y) = (v_x \times u_x) + (v_y \times u_y) = \vec{v}.\vec{u} \Longrightarrow \boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$$

$$\checkmark\ \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\beta \qquad \text{Avec } \beta = \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

Cas particulier, si $\boldsymbol{\beta = 90°}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul

Signification du produit scalaire de deux vecteurs ?



$$\vec{V}.\vec{i} = \|\vec{V}\| \times \|\vec{i}\| \times \cos\theta = V \times \cos\theta \ = a$$

$$\vec{V}.\vec{j} = \|\vec{V}\| \times \|\vec{j}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = V \times \sin\theta = b$$

Le produit scalaire de $\vec{V}$ par le vecteur unitaire $\vec{i}$ ($\vec{j}$) donne la projection de $\vec{V}$ sur l'axe x (y).

Plus généralement

La projection d'un vecteur $\overrightarrow{V_1}$ sur un vecteur $\overrightarrow{V_2}$ est donnée par $\overrightarrow{V_1}\,.\,\overrightarrow{u_2}$, où $\overrightarrow{u_2}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{V_2}$

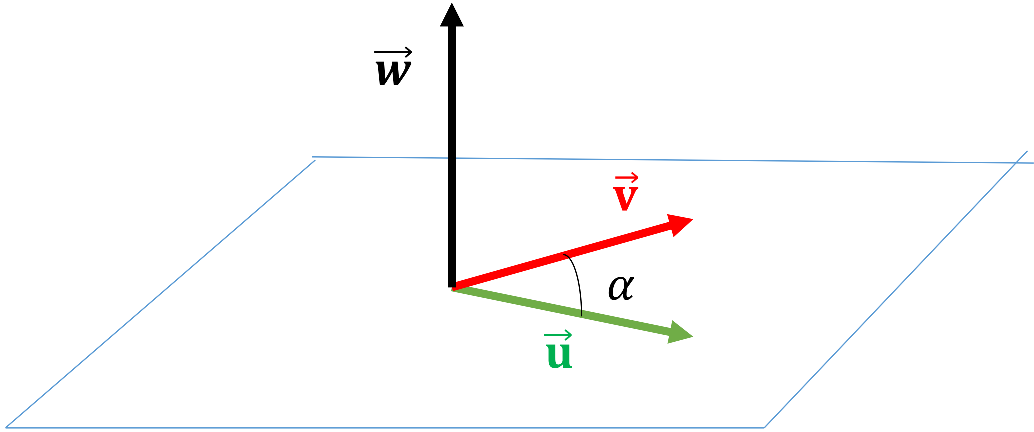
Inversement

La projection de $\overrightarrow{V_2}$ sur $\overrightarrow{V_1}$ est donnée par $\overrightarrow{V_2}\,.\,\overrightarrow{u_1}$, où $\overrightarrow{u_1}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{V_1}$

c/ Produit vectoriel entre deux vecteurs = vecteur

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y \times v_z - u_z \times v_y \\ u_z \times v_x - u_x \times v_z \\ u_x \times v_y - u_y \times v_x \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ / $\vec{w} \perp \vec{u}$ ***et*** $\vec{w} \perp \vec{v}$



$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin \alpha|$$ **Avec** $\boldsymbol{\alpha} = \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

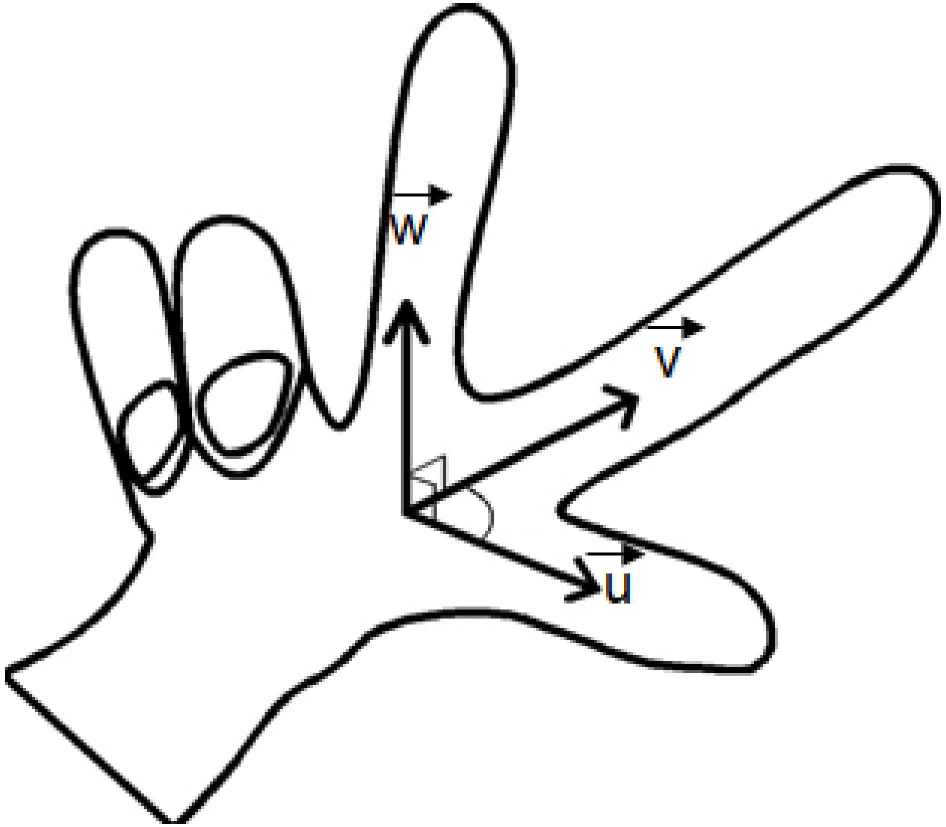
N.B:

$\vec{u} \wedge \vec{v} = - \vec{v} \wedge \vec{u}$ **le produit vectoriel n'est pas commutatif**

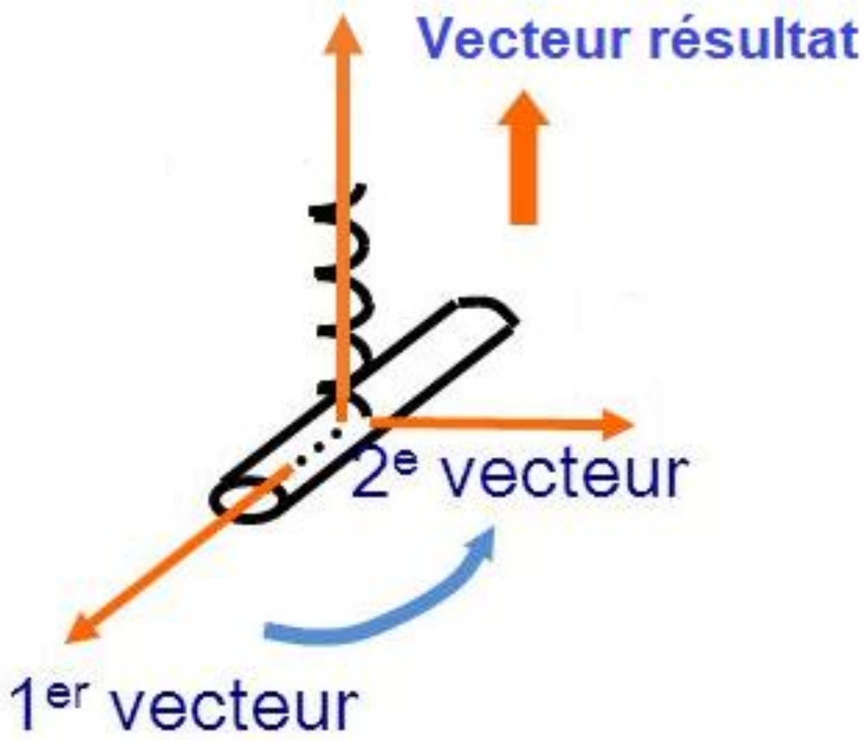
$\vec{u}, \vec{v}$ **et** $\vec{w}$ **forment un trièdre direct**

Si $\overrightarrow{\mathbf{u}} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ alors $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ **et $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ forment un trièdre direct**

Règle des 3 doigts main droite



Règle du tire-bouchon

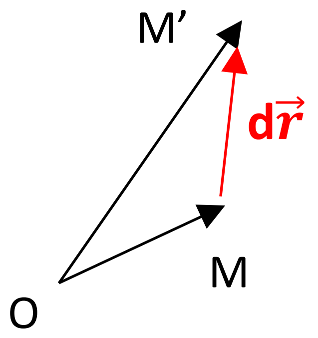


2/ Les systèmes de coordonnées

A partir d'une origine O tout point M peut être repéré par le **vecteur** position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

Entre deux point voisins M et M', on définit le vecteur « déplacement élémentaire » $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\vec{r}$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

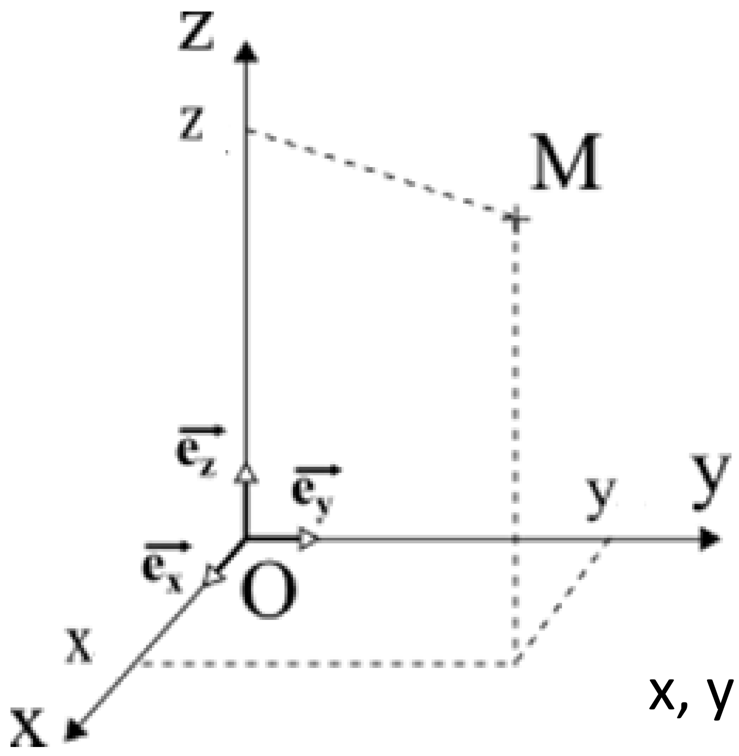


En physique, selon le problème étudié, on choisit entre plusieurs systèmes de coordonnées:

- ✓ Les cartésiennes (2D ou 3D)
- ✓ Les polaires en 2D
- ✓ Les cylindriques ou cylindro-polaires en 3D
- ✓ Les sphériques en 3D

Pour notre cours nous utiliserons les cartésiennes, les polaires et les cylindriques

2-1. Les coordonnées cartésiennes



Repère fixe $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$

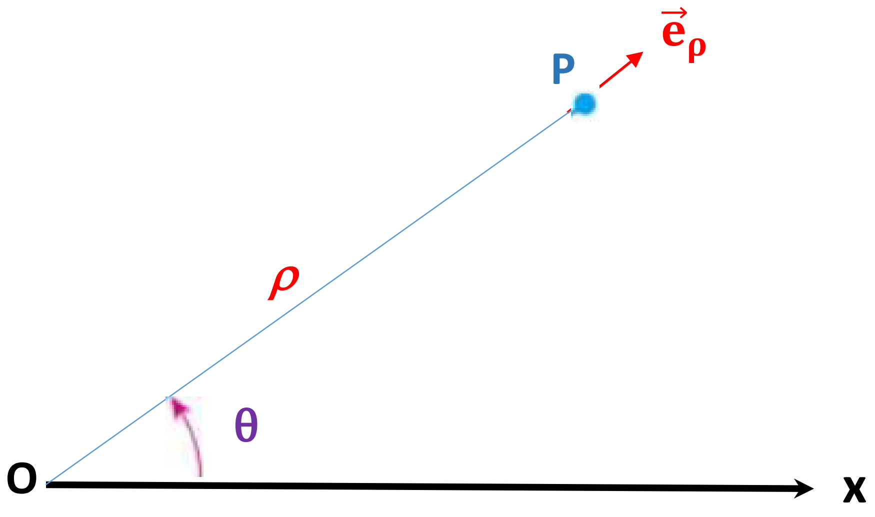
$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du point M.

On écrit M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou M (x, y, z)

Le déplacement élémentaire : $\boxed{d\vec{r} = dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z}}$

2-2. Les coordonnées polaires



Tout point P est représenté par :

- ρ la distance qui le sépare de O

- θ l'angle entre l'axe Ox (l'axe polaire) et OP

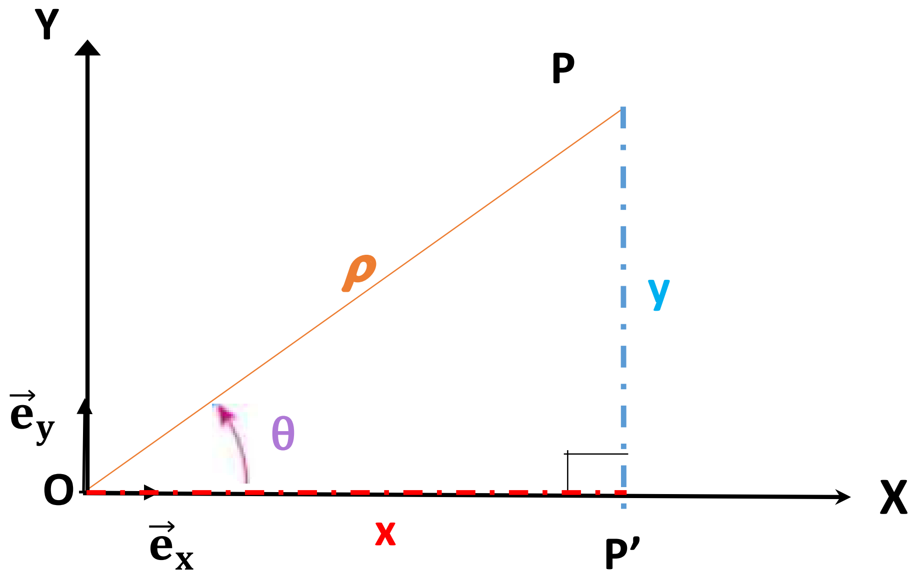
On écrit: P (ρ, θ)

$$\overrightarrow{OP} = \rho\overrightarrow{e_\rho} \Rightarrow \overrightarrow{e_\rho} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\rho} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{e_\rho}\| = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|}{\|\overrightarrow{OP}\|} = 1 \Rightarrow$$ $\overrightarrow{e_\rho}$ est un vecteur unitaire

Relation entre coordonnées cartésiennes et polaires (1)

$\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}$

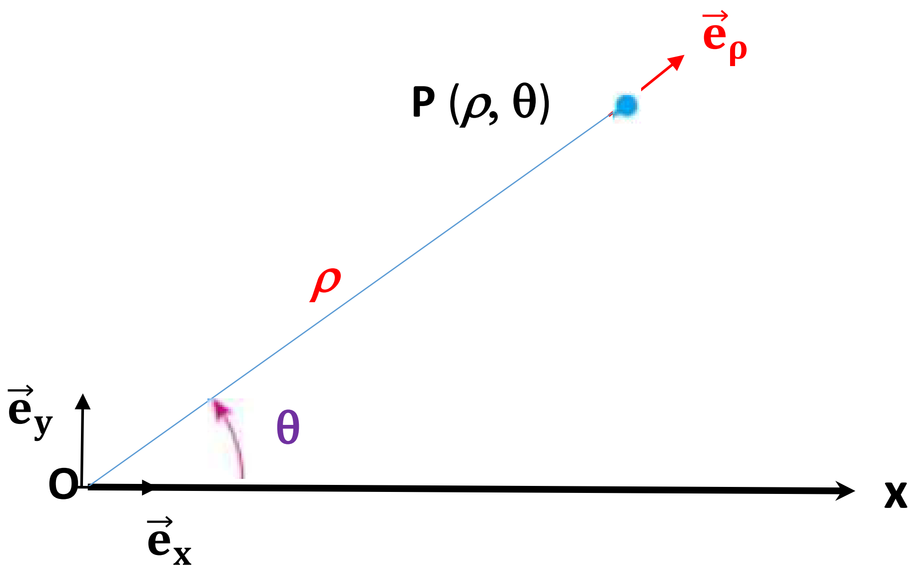


Triangle rectangle $\widehat{\mathrm{PP'O}}$ $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{\rho}$

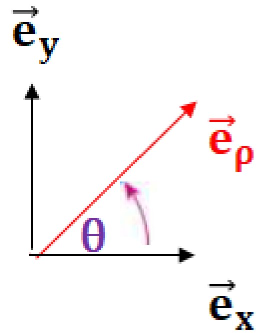
$$\begin{cases} x = \rho \times \cos\theta \\ y = \rho \times \sin\theta \end{cases}$$

$\overrightarrow{OP} = (\rho \times \cos)\,\overrightarrow{e_x} + (\rho \times \sin\theta)\,\overrightarrow{e_y}$

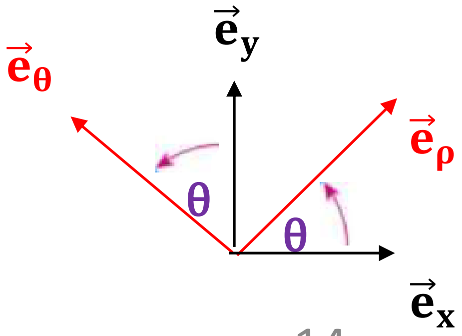
Relation entre coordonnées cartésiennes et polaires (2)



$\overrightarrow{OP} = \rho \times (\cos\theta \times \overrightarrow{e_x} + \sin\theta \times \overrightarrow{e_y}) = \rho \times \overrightarrow{e_\rho}$ ⇒ $\overrightarrow{e_\rho} = cos\theta \times \overrightarrow{e_x} + sin\theta \times \overrightarrow{e_y}$



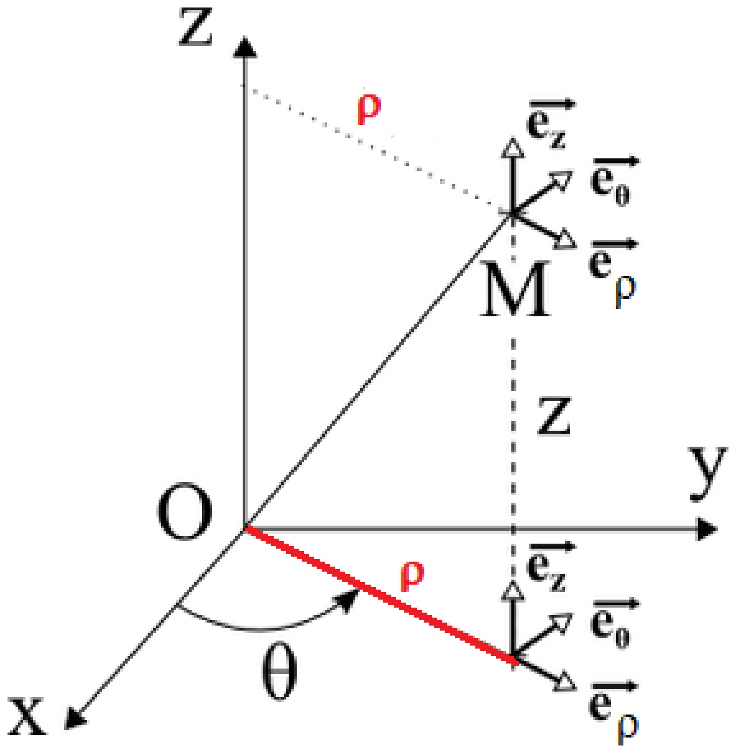
$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = -sin\theta \times \overrightarrow{e_x} + cos\theta \times \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_\theta}$$



$\overrightarrow{e_\theta} . \overrightarrow{e_\rho} = -sin\theta \times \cos\theta + cos\theta \times \sin\theta = 0$ ⇒ $\overrightarrow{e_\rho} \perp \overrightarrow{e_\theta}$

$\|\overrightarrow{e_\rho}\| = \|\overrightarrow{e_\theta}\| = \sqrt{sin^2\theta + cos^2\theta} = 1$ ⇒ Vecteurs unitaires

2-3. Les coordonnées cylindriques (cylindro-polaires)



Repère mobile $(O, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \times \overrightarrow{e_\rho} + z \times \overrightarrow{e_z}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho} = cos\theta \times \overrightarrow{e_x} + sin\theta \times \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -sin\theta \times \overrightarrow{e_x} + cos\theta \times \overrightarrow{e_y} \\ \vec{e}_z \ (fixe) \end{cases}$$

Le déplacement élémentaire :

$$d\vec{r} = d(\rho \times \overrightarrow{e_\rho} + z \times \overrightarrow{e_z}) = d\rho \times \overrightarrow{e_\rho} + \rho \times d\overrightarrow{e_\rho} + dz \times \overrightarrow{e_z}$$

$$= d\rho \times \overrightarrow{e_\rho} + \rho \times d\left(cos\theta \times \overrightarrow{e_x} + sin\theta \times \overrightarrow{e_y}\right) + dz \times \overrightarrow{e_z}$$

$$= d\rho \times \overrightarrow{e_\rho} + \rho \times d(cos\theta \times \overrightarrow{e_x}) + \rho \times d\left(sin\theta \times \overrightarrow{e_y}\right) + dz \times \overrightarrow{e_z}$$

$$= d\rho \times \overrightarrow{e_\rho} - \rho \times \sin\theta \times d\theta \times \overrightarrow{e_x} + \rho \times cos\theta \times d\theta \times \overrightarrow{e_y} + dz \times \overrightarrow{e_z}$$

$$= d\rho \times \overrightarrow{e_\rho} + \rho \times d\theta \times \underbrace{(-\sin\theta \times \overrightarrow{e_x} + cos\theta \times \overrightarrow{e_y})}_{\overrightarrow{e_\theta}} + dz \times \overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{d\vec{r} = d\rho \times \overrightarrow{e_\rho} + \rho \times d\theta \times \overrightarrow{e_\theta} + dz \times \overrightarrow{e_z}}$$

Notion de champ

1/ Définitions

Un champ est un outil qui permet d'associer à chaque point de l'espace une grandeur physique.

- **G(M,t) : ensemble de valeurs prises par la grandeur physique G en fonction des coordonnées d'espace et du temps t.**

On note aussi : $G(\vec{r}, t)$ ou G(x,y,z,t)

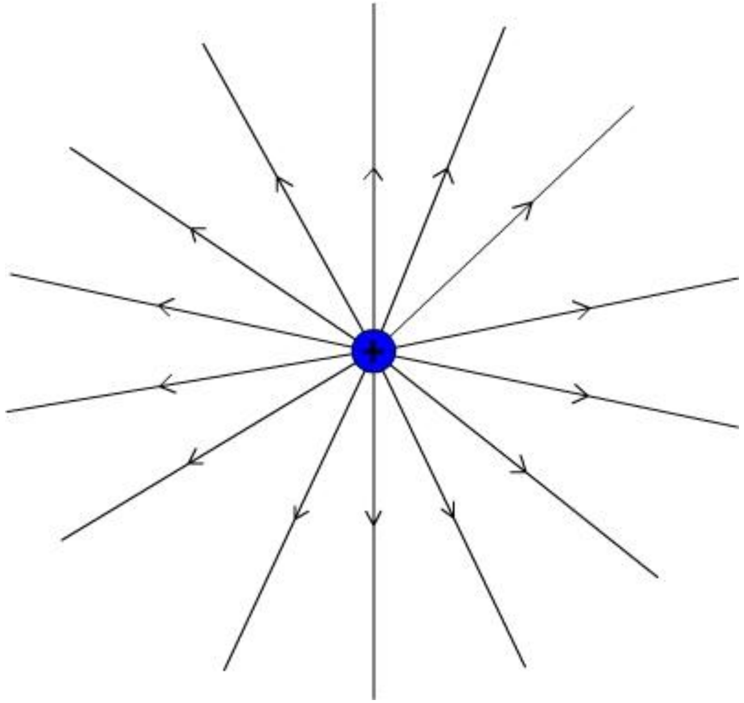
Un champ peut être:

- ✓ **scalaire f(M,t) lorsqu'il concerne une grandeur physique décrite uniquement par sa valeur (appelée aussi norme ou intensité) e.g. pression, température, potentiel..**
- ✓ **vectoriel $\vec{A}\,(M, t)$ s'il concerne une grandeur physique décrite non seulement par sa valeur mais aussi par une direction et un sens lui permettant d'être représentée par un vecteur. e.g. vitesse $\vec{v}$, champ $\vec{E}$**

On dit qu'un **champ** est **uniforme** s'il est **indépendant de** la position **M**

On dit qu'un **champ** est **statique ou permanent** s'il est **indépendant du** temps **t**

Tout champ vectoriel $\vec{A}\,(M, t)$ peut être représenté par des lignes de champs qui permettent de visualiser son orientation, son sens.



Lignes du champ électrique d'une charge positive