

## Cours du 23 février :

- Rappels sur les dérivées de fonctions à une seule variable, les dérivées partielles des fonctions à plusieurs variables ainsi que leurs différentielles .
- Rappels sur les vecteurs et les différentes opérations sur les vecteurs et introduction du produit vectoriel.
- Rappels et discussion des différents systèmes de coordonnées. Introduction ou rappels sur les coordonnées polaires et cylindro-polaires.
- Notions de champs scalaires et vectoriels en physique et visualisation des lignes de champ.

Pour vous entraîner, les feuilles « Dérivées totales et partielles de fonctions » et « Manipulation de vecteurs » sont disponibles et accessibles sur wims.

## 2/ Gradient d'un champ scalaire f(M)

En physique et en analyse vectorielle on définit, en coordonnées cartésiennes, le gradient d'un champ scalaire  $f(M) = f(x, y, z)$  par:

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \overrightarrow{u}_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \overrightarrow{u}_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \overrightarrow{u}_z$$

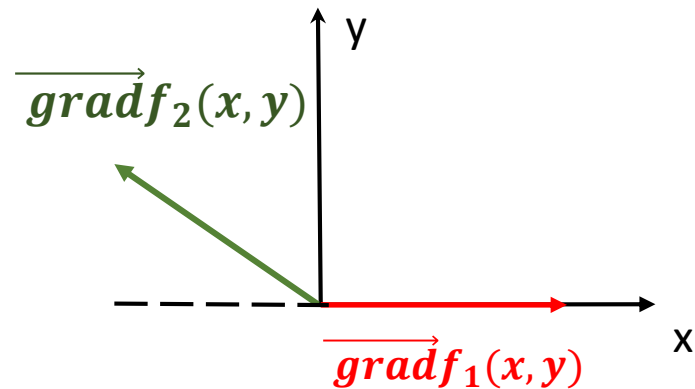
$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

**Exemples:**

$$f_1(x, y) = ax + b \implies \overrightarrow{\text{grad}}f_1(x, y) = a \overrightarrow{u}_x \quad \text{Où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes}$$

$$f_2(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \implies \overrightarrow{\text{grad}}f_2(x, y) = \alpha \overrightarrow{u}_x + \beta \overrightarrow{u}_y \quad \text{où } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ sont des constantes}$$

Si  $\alpha < 0, \beta > 0$  et  $a > 0$



**Le gradient d'une fonction est un vecteur qui indique les directions de l'espace selon lesquelles varie une fonction donnée.**

**En électrostatique le champ (vectoriel) électrique  $\vec{E}$  est relié au champ scalaire  $V$  par:**

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{On dit que } \vec{E} \text{ dérive du potentiel } V$$

### 3/ Opérateur différentiel Nabla (noté $\vec{\nabla}$ )

C'est un opérateur vectoriel dont les composantes constituent des opérations de dérivées partielles.

➤ En coordonnées cartésiennes il s'écrit sous la forme:  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$f(x, y, z) = 35 x^2 + 20 y^3 + 3z$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \vec{u}_z = 70 x \vec{u}_x + 60 y^2 \vec{u}_y + 3 \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 70 x \\ 60 y^2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

➤ En coordonnées cylindriques il s'écrit sous la forme:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$f(r, \theta, z) = 3 r^2 \cos \theta + 5 z \sin \theta$$

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$= 6 r \cos \theta \vec{u}_r + \frac{1}{r} (-3 r^2 \sin \theta + 5 z \cos \theta) \vec{u}_\theta + 5 \sin \theta \vec{u}_z$$

Nabla peut être appliqué à des champs scalaires ou champs vectoriels, ainsi:

✓ Si  $f$  est un champ scalaire alors, on parle de **gradient** :

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}} f$$

✓ Si  $\vec{A}$  est un champ vectoriel alors on peut définir deux opérations entre  $\vec{A}$  et  $\vec{\nabla}$ :

□ **La divergence**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

□ **Le rotationnel**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

**Pour le cours de cette année nous n'utiliserons que la notion du gradient**

# Champ et potentiel électrostatiques

**Electrostatique** = Etude des interactions électriques entre **charges immobiles**.

L'électrostatique se base sur la **loi de Coulomb** et le **principe de superposition**.

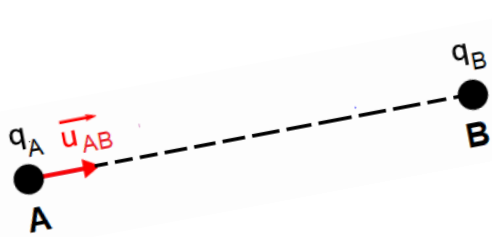
# Charge électrique et force électrostatique

## 1. Propriétés de la charge électrique

- La charge électrique, notée  $q$  est une grandeur scalaire:  $q > 0$  ou  $q < 0$  ( $q = 0$  pour un milieu neutre)
- Un atome = un noyau chargé positivement (protons) et un nuage électronique contrebalance la charge du noyau: Un atome est neutre
- Ions:
  - cations de charge  $> 0$  = un atome privé d'un ou plusieurs électrons.
  - anions de charge  $< 0$  = un atome qui a capturé un ou plusieurs électrons.
- Il existe une charge élémentaire notée  $e$  telle que:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  (C : Coulomb)
- Toute charge  $q$  est multiple de  $e$
- Pour un électron  $q_{e^-} = -e$
- Pour un proton  $q_p = +e$ 
  - Répulsion entre A et B si  $q_A \cdot q_B > 0$  ( $q_A$  et  $q_B$  mêmes signes)
  - Attraction entre A et B si  $q_A \cdot q_B < 0$  ( $q_A$  et  $q_B$  signes opposés)

## 2. La loi de Coulomb

Enoncée en 1785 par Charles Augustin Coulomb, elle décrit l'interaction entre deux charges électriques  $q_A$  et  $q_B$  situées aux points A et B.



$$\vec{F}_{q_A/q_B} = \vec{F}_{q_A}(q_B) = k \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_{AB} = k \frac{q_A q_B}{r^2} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = k q_A q_B \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3}$$

$$r = \|\vec{AB}\| \quad \vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} \text{ est un vecteur unitaire colinéaire à } \vec{AB} \text{ et dirigé de A vers B}$$

$k$  est la constante de Coulomb

❖ Dans le vide  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  avec  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide =  $8,82 \cdot 10^{-12}$  F. m<sup>-1</sup> (F = Farad)

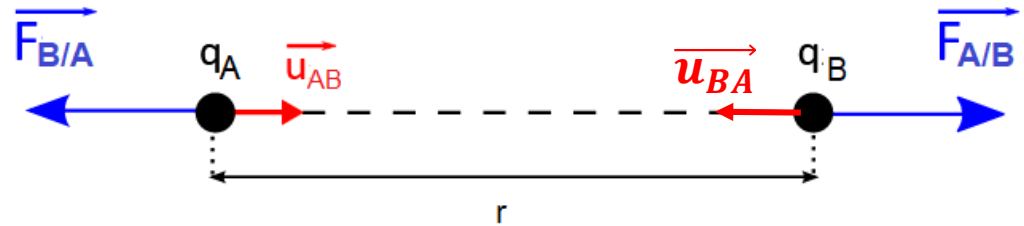


$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ F}^{-1} \text{ m} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$

$$\vec{F}_{q_B/q_A} = k \frac{q_B \cdot q_A}{r^2} \vec{u}_{BA} = k \frac{q_B \cdot q_A}{BA^2} \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|} = k q_A \cdot q_B \frac{(\vec{BA})}{\|\vec{BA}\|^3} = k q_A \cdot q_B \frac{(-\vec{AB})}{\|\vec{AB}\|^3} = -\vec{F}_{q_A/q_B}$$

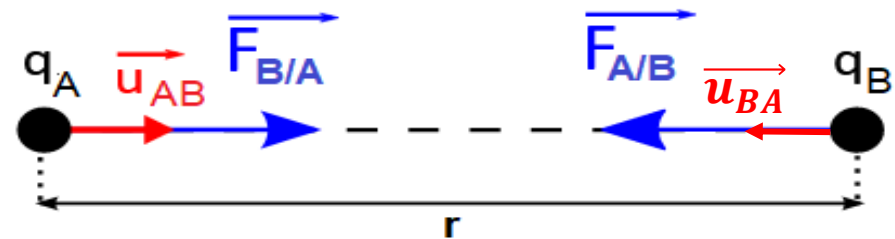
Cohérence avec la 3<sup>ème</sup> loi de Newton: Principe de l'action et de la réaction= Interaction Coulombienne

Si  $q_A \cdot q_B > 0$ ,  $q_A$  et  $q_B$  de même signe



**Ce sont des forces répulsives**

Si  $q_A \cdot q_B < 0$ ,  $q_A$  et  $q_B$  de signes opposés



**Ce sont des forces attractives**

## Force électrostatique vs force gravitationnelle

Soient deux électrons distants de  $r$ .

La masse de l'électron est de  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, sa charge est de  $-1.6 \cdot 10^{-19}$  C .

La force gravitationnelle qui s'exerce entre les deux électrons est donnée par:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \frac{m^2}{r^2} \quad \text{avec } G \sim 6,67 \times 10^{-11} \text{ S.I.}$$

La force électrostatique est donnée par:

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = k \frac{q^2}{r^2} \quad \text{avec } k = 9 \times 10^9 \text{ S.I.}$$

On a donc

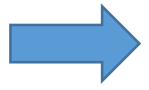
$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k q^2}{G m^2} \sim 4.2 \cdot 10^{42}$$



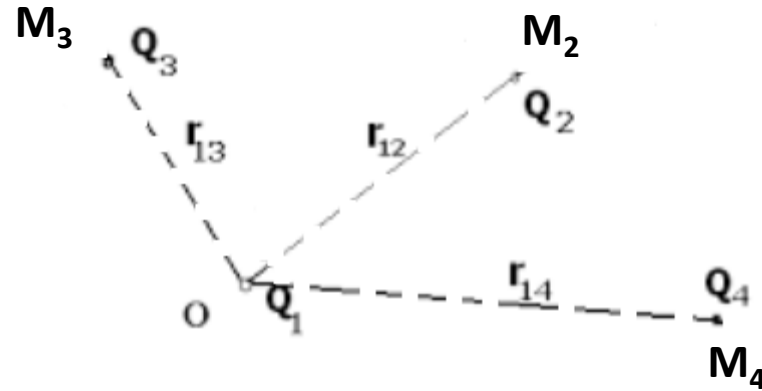
Pour des charges en présence, seule l'interaction électrostatique est à considérer.

### 3. Principe de superposition

L'interaction coulombienne entre deux charges est indépendante de la présence d'autres charges aux alentours.



**La force  $F$  exercée sur une charge est la résultante (vectorielle) des forces de Coulomb exercées par chaque autre charge sur elle.**

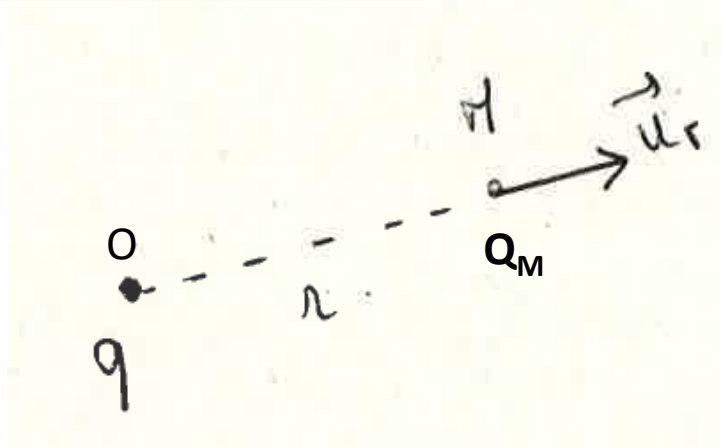


$$\vec{F}(Q_1) = \sum_{i=2}^4 k \frac{Q_i Q_1}{r_{1i}^3} \overrightarrow{M_i O}$$

# Champ et potentiel électrostatiques

## 1. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

- On considère une charge  $q$  placée en  $O$ .



La loi de Coulomb

$$\vec{F}_{q/Q_M} = \vec{F}_q(Q_M) = k \frac{q Q_M}{r^2} \vec{u}_r = k \frac{q Q_M}{\|\vec{OM}\|^2} \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = kq Q_M \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$$

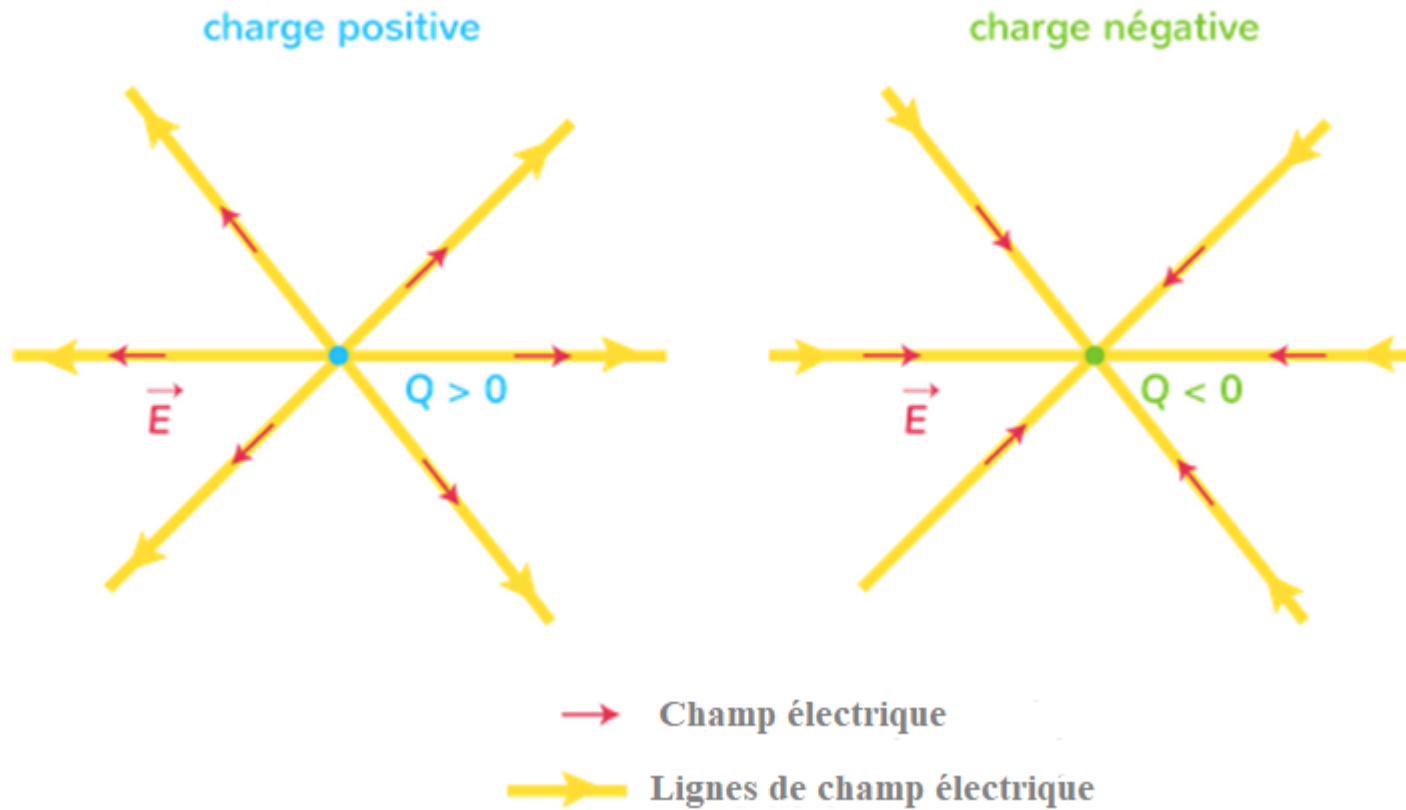
$$\vec{F}_{q/Q_M} = \vec{F}_q(Q_M) = Q_M \left( kq \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} \right)$$

A partir de là, on définit un champ électrique créé au point  $M$  par la charge placée en  $O$  par:

$$\vec{E}_q(M) = kq \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} = kq \frac{\vec{u}_{OM}}{\|\vec{OM}\|^2} = k \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } q > 0 \text{ alors } \vec{E} \text{ et } \vec{u}_{OM} \text{ même sens} \\ \text{Si } q < 0 \text{ alors } \vec{E} \text{ et } \vec{u}_{OM} \text{ sens contraires} \end{array} \right.$

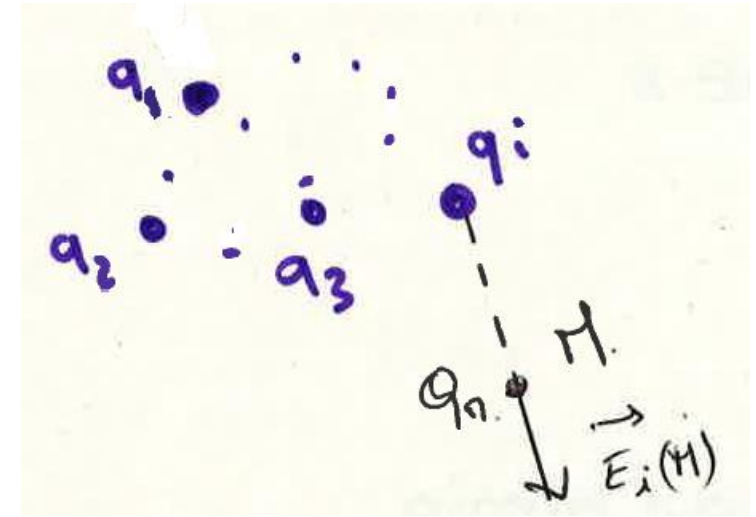


En présence du champ  $\vec{E}(M)$  la charge  $Q_M$  sera soumise à la force électrique:

$$\vec{F} = Q_M \vec{E}(M)$$

## 2. Champ créé par une distribution discrète de charges

On considère N charges  $q_i$  situées aux points  $P_i$  ( $i = 1$  à  $N$ )

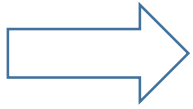


Chaque charge  $q_i$  exerce sur la charge  $Q_M$  (dite charge épreuve) une force

$$\vec{F}_{q_i/Q_M} = Q_M \vec{E}_{q_i}(M)$$

En appliquant le principe de superposition on obtient la force totale exercée sur  $Q_M$

$$\vec{F}(Q_M) = \sum_{i=1}^N Q_M \vec{E}_{q_i}(M) = Q_M \sum_{i=1}^N \vec{E}_{q_i}(M) = Q_M \vec{E}(M)$$



Le champ électrique en un point M de l'espace voisin de la distribution discrète est égal à la somme des champs électriques créés par chaque charge de celle-ci.



Le principe de superposition s'applique aussi pour le champ électrique.

