Chap 9 Calcul matriciel dans des bases quelconques

1. Matrices d'app. linéaires dans des bases générales

Soit $f : E \to F$ une app. linéaire donnée entre 2 ev E et F.

On choisit 2 bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base de E

$\mathcal{B}' = (\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n)$ base de F

f est déterminée par $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)$

par la formule

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_p\vec{u}_p$$

$$\downarrow$$

$$f(\vec{u}) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \dots + x_p f(\vec{u}_p)$$

$\rightarrow$ coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$ dans B'

On aura de nouveau

$$\boxed{Y = AX}$$

X = coordonnées de $\vec{u}$ dans B

Y = coordonnées de $f(\vec{u})$ dans B'

et $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & f(\vec{u}_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \square & \square & \square \end{pmatrix} \end{array}$ $\rightarrow$ coordonnées des $f(\vec{u}_i)$ dans la base B'

def $A = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$

on lui parle en base B et elle répond en base B'

Exemples • $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$
$$X \mapsto AX = Y$$

Question que devient la matrice de f si on garde la base canonique $\mathcal{B}$ can dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1 = (1,2), \vec{u}_2 = (3,4))$ dans $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée

On a $$\left[A' = \underset{\mathcal{B}can, \mathcal{B}'}{Mat}(f) = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$ $\rightsquigarrow$ à exprimer dans $\mathcal{B}'$

$$f(\vec{e}_1) = (1,2) = \vec{u}_1 = 1 \times \vec{u}_1 + 0 \times \vec{u}_2$$
$$f(\vec{e}_2) = (3,4) = \vec{u}_2 = 0 \times \vec{u}_1 + 1 \times \vec{u}_2$$

$f(\vec{e_3}) = (1,2) = \vec{u_1} = 1 \times u_1 + 0 \times \vec{u_2}$

si $f(\vec{e_3}) = (4,6) = \vec{u_1} + \vec{u_2} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

associée à $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

que vaut $\mathrm{Mat}_{B', B'}(f) = A'$ avec $B' = (\vec{u_1} = (1,1), \vec{u_2} = (1,-1))$?

$\parallel$

$\mathrm{Mat}_{B'}(f)$ notation simplifiée pour un endomorphisme $f : \underbrace{E}_{B'} \to \underbrace{E}_{B'}$

Il faut calculer $f(\vec{u_1})$ et $f(\vec{u_2})$ (image de B' par f)

et exprimer le résultat dans la base B'

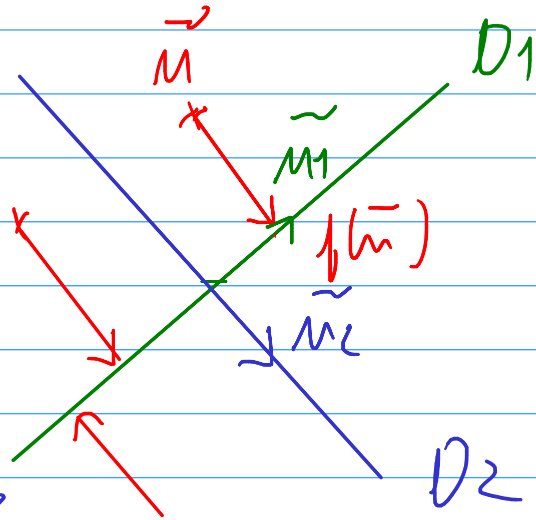
$$f(\tilde{u}_1)\ ? = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \tilde{u}_1\ ! = (1,0)_{B'}$$

résultat dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$f(\tilde{u}_2) = A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,0)_{B'}$$

$$A' = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{array}{cc} f(\tilde{u}_1) & f(\tilde{u}_2) \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)} \end{array} \rightsquigarrow \text{exprimé dans } B'$$

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ !$$



En fait f est la projection sur la droite engendrée par $\tilde{u}_1$ suivant celle engendrée par $\tilde{u}_2$

$$A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}$$

coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$

f n'est pas la projection sur l'axe des x !

2. Calcul matriciel général

Les règles de calculs pour les produits compositions et inverses s'appliquent pour toutes les bases

Propriétés ① $f : \underset{\mathcal{B}}{E} \to \underset{\mathcal{B}'}{F}$ $\quad g : \underset{\mathcal{B}'}{F} \to \underset{\mathcal{B}''}{G}$ bases

$\rightsquigarrow$ $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(f)$ $\quad B = \underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}{\mathrm{Mat}}(g)$

on a $\mathrm{Mat}_{B,B''}(f \circ g) = A \times B$

(2) $\underset{B}{f : E} \to \underset{B'}{F}$ est un isomorphisme

si $A = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$ est inversible

et $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{B',B}(f^{-1})$

(1)
$$\begin{array}{ccccccc}
\vec{v} & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\
\updownarrow & \wr & A & \wr & B & \wr \\
X_B & & \longrightarrow & Y_{B'} = AX_B & \longrightarrow & BA(X_B) = Z_{B''}
\end{array}$$

3. Chgt de bases et matrices de passage

Pb : E ev donné avec 2 bases

$B = (u_1, \dots, u_n)$ $\qquad B' = (u'_1, \dots, u'_n)$

vecteur $\vec{v}$ donné dans E $\rightsquigarrow$ coordonnées X dans la base B

$\rightsquigarrow$ —— X' —— B'

Comment X et X' sont-ils liés ?

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{L_{B'}} E \xrightarrow{C_B} \mathbb{R}^n$$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \underset{C_{B'}}{\longleftarrow} \vec{v} \underset{C_B}{\longrightarrow} C_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ dans } B$$

dans B'

$$L_{B'}(X') = \sum x'_i \vec{u'_i} \qquad L_{B'} = (C_{B'})^{-1}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X' = C_{\mathcal{B}'}(\vec{v}) \in \mathbb{R}^n \arrow[dl, bend left, "L_{\mathcal{B}'}"] \\
E \ni \vec{v} \arrow[ur, "C_{\mathcal{B}'}"] \arrow[dr, "C_{\mathcal{B}}"'] & \\
 & X = C_{\mathcal{B}}(\vec{v}) \in \mathbb{R}^n \arrow[ul, bend right, "L_{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}
$$

def On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice dans $\mathbb{R}^n$ de l'application $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = C_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{B}'}$

Prop On a $\boxed{X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'}$

Attention à la terminologie ! $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ permet de passer des coordonnées dans $\mathcal{B}'$ à celles dans $\mathcal{B}$ et pas l'inverse !

Méthode pour calcul $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$: on met en colonnes les coordonnées des u_j' dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ des u_i

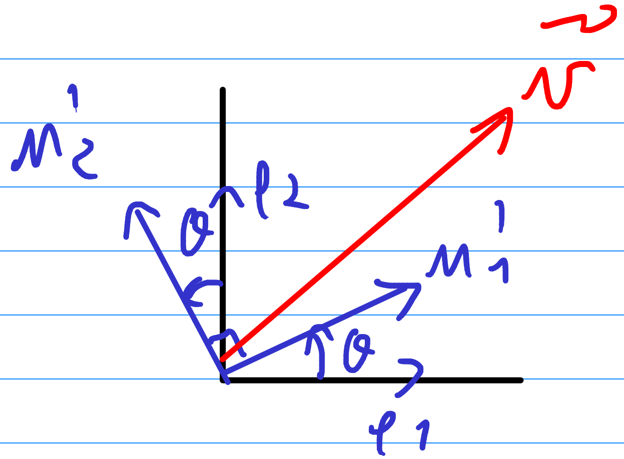
$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{array}{ccc} u_1' & u_2' & u_n' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \end{array} \left(\boxed{} \ \boxed{} \ \boxed{} \right) \rightarrow \text{exprimés dans la base } \mathcal{B}$$

Thm pour calculer X' à l'aide de X il faut inverser la matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

on a $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ inversible et $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

$X = PX' \iff X' = P^{-1}X$ avec $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Exemple $\mathbb{R}^2$ $\quad B = B_{can} = (e_1, e_2)$ $\quad B' = B$ tourné d'un angle θ



$B' : u'_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$
$\quad\; u'_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$

matrice de passage de B à B' :
$$P = \begin{array}{cc} u'_1 & u'_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{dans } B = B_{can}$$

$\vec{v} \rightsquigarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $B = B_{can}$

$\hookrightarrow X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans B', à calculer !

On a $X = PX'$ mais on veut X' à l'aide de X !

$\rightsquigarrow \quad X' = P^{-1} X$

P^{-1} à calculer. $\det P = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\rightsquigarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta . x + \sin\theta\, y \\ -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique

P = Matrice de la rotation d'angle θ

on passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ en faisant tourner $\mathcal{B}$ d'un angle θ

$\rightarrow P^{-1}$ = matrice de rotation d'angle $-\theta$

avec $X' = P^{-1} X$

On a l'impression que $\vec{v}$ tourne d'un angle $-\theta$ mais c'est le repère qui tourne !

$\vec{v}$ est reste à sa place

En fait $P_{B}^{B'} = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{Id})$

4. Chgt de bases pour les endomorphismes

PB : $f : E \rightarrow E$ une app. linéaire avec $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E

$\rightarrow A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \quad A' = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(f)$

relier A et A' ? En utilisant $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

Thm on a $A' = P^{-1} A P$

dem X' dans $\mathcal{B}'$ $\rightarrow$ traduire X' dans la base $\mathcal{B}$

on $X = PX'$

$\rightarrow AX$ pour trouver l'image de X par f dans $\mathcal{B}$

AX réponse dans la base $\mathcal{B}$

$\rightarrow$ retraduire dans la base $\mathcal{B}'$

$$P^{-1}(AX) = P^{-1}APX'$$

Attention à cette formule P à inverser

+ 2 produits de matrices !

$\rightarrow$ source d'erreurs

5. La trace d'une matrice

quantité facilement calculable qui ne dépend pas de la base de travail pour les endomorphismes

def $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

une matrice carrée

la trace de $A = Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Thm si $A' = P^{-1}AP$

alors $Tr(A') = Tr(A)$

→ conséquence $Tr(A)$ est inchangée par chgt de base

pour $A = Mat(f)$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

→ vérification d'un calcul de chgt de base

+ prédiction

vient du lemme suivant

lemme : $Tr(AB) = Tr(BA)$ $\qquad Tr((P^{-1})(AP)) = Tr(A)$

dem : voir poly (pas si dur !)

application

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dans Base canonique
$\quad X \mapsto AX$

Pb : Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$A' = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad 4 = \mathrm{Trace}\, A = \mathrm{Trace}\, A'$$

$$B' = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4)$$

Il faut trouver u'_1, u'_2, u'_3 indépendants tels que $f(u'_1) = f(u'_2) = f(u'_3) = 0$

$\Leftrightarrow$ $u'_1, u'_2, u'_3 \in \ker f$

On a rang $A = \mathrm{rg}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f) = 1$ en échelonnant

$\Rightarrow$ $\dim \underline{\ker f} = 4 - \mathrm{rang}\, A = \underline{3}$

$v = (x, y, z, t) \in \ker f \Leftrightarrow x + y + z + t = 0$

On prend u'_1, u'_2, u'_3 base de Ker f (de dim 3)

Comme il faut que $f(u'_4) = 4u'_4 \in \mathrm{Im} f$

On essaye $u'_4 = (1,1,1,1)$

On a bien $f(u'_4) = (4,4,4,4) = 4(1,1,1,1)$

$u'_4 \notin \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(u'_1, u'_2, u'_3)$

$\rightsquigarrow B' = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4)$ base de $\mathbb{R}^4$

$$f(u'_4) = 4(1,1,1,1) = 4u'_4 = 0 \times u'_1 + 0 \times u'_2 + 0 \times u'_3 + 4 \times u'_4$$

$\rightarrow (0,0,0,4)_{B'}$

En fait, f est $4 \times$ projection orthogonale sur la droite D engendrée par u'_4