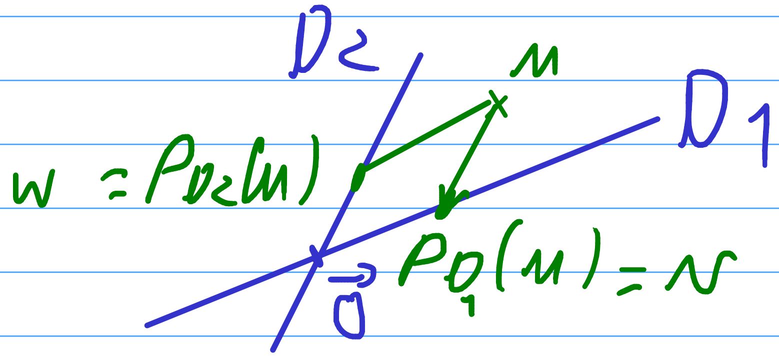
Chap 8 Espaces supplémentaires somme directe, projections et symétries

1. Espaces supplémentaires et sommes directes

Objectif généraliser la décomposition de $\mathbb{R}^2$ suivant 2 droites données



def On dit que 2 sev E, F de $\mathbb{R}^n$ sont supplémentaires si tout $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in E$ et $\vec{w} \in F$

On écrit que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ et on dit que $\mathbb{R}^n$ est somme directe de E et F

Exemples $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$ avec D_1 et D_2 2 droites vectorielles $\neq$

Comment faire la décomposition de $\vec{u} = (x, y)$ en pratique ? On écrit $D_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $D_2 = \mathrm{Vect}(u_2)$ avec u_1 et u_2 non colinéaires

Pb : écrire $\vec{u} = (x, y)$ sous la forme

$$\left\{ \vec{u} = \underbrace{\lambda_1 \vec{u}_1}_{\in D_1} + \underbrace{\lambda_2 \vec{u}_2}_{\in D_2} \right\}$$

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

λ_1, λ_2 coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\Leftrightarrow$ résoudre le syst associé $\lambda_1 \underbrace{\vec{u}_1}_{\text{connus}} + \lambda_2 \vec{u}_2 = (x, y)$ } (E)

2 éq, 2 inconnues λ_1, λ_2

solution unique car $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ base de $\mathbb{R}^2$

si $\vec{u}_1 = (a, b)$, $\vec{u}_2 = (c, d)$

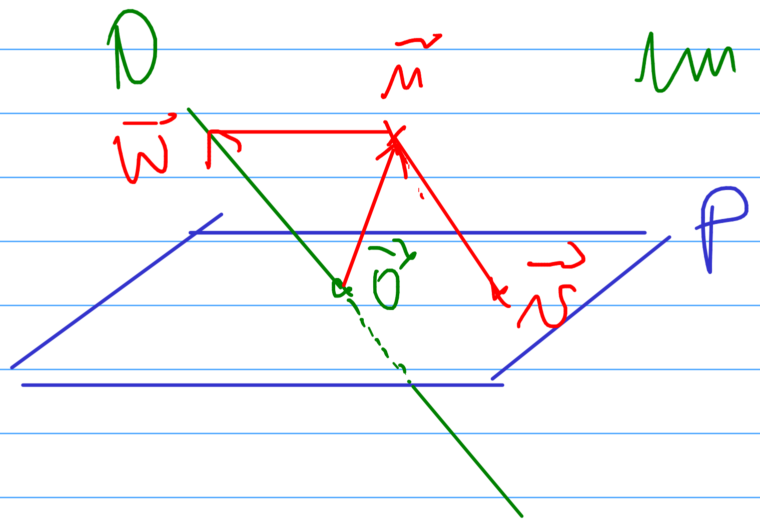
alors $(E) \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

inverse de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Dans $\mathbb{R}^3$? typiquement $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$

un plan — une droite $\not\subset P$



Pb : comment faire les calculs correspondants à ce dessin ?

Une méthode est de prendre une base $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ de P et $\vec{u}_3$ de D

$\vec{u}_3 \notin P$ si $D \cap P = \{\vec{0}\}$.

$\rightsquigarrow \mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ syst libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$\rightsquigarrow$ base de $\mathbb{R}^3$

On pourra écrire $\vec{u} = (x,y,z)$ qq de manière unique sous la forme $\vec{u} = \underbrace{\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2}_{\vec{v} \in P} + \underbrace{\lambda_3 \vec{u}_3}_{\vec{w} \in D}$

Thm On a $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ ssi $\dim E + \dim F = n$ et $E \cap F = \{\vec{0}\}$

exemples $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \{\vec{0}\}$

$\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ avec $P \cap D = \{\vec{0}\}$

.....

idée $\Leftarrow$ mettre bout à bout une base de E et de F et de montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^n$ sous les

Conditions $\dim E + \dim F = n$ et $E \cap F = \{\vec{0}\}$

$B_E = (e_1, \dots, e_p)$ base de E $\quad B_F = (f_1, \dots, f_q)$ base de F

$B = B_E \sqcup B_F = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ base de $\mathbb{R}^n$?

$p = \dim E$, $q = \dim F$

$\operatorname{Card} B = p + q = n = \dim \mathbb{R}^n$

Pour que B soit une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit que B soit libre

Si $\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p}_{\in E} + \underbrace{\mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q}_{\in F} = 0$

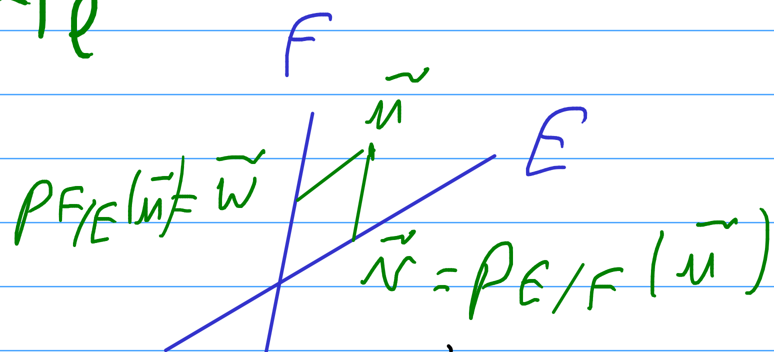
$\rightarrow \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p}_{= \vec{0}} = \underbrace{-\mu_1 f_1 \dots - \mu_q f_q}_{= \vec{0}} \in E \cap F = \{\vec{0}\}$

$\rightsquigarrow$ $\lambda_1 = 0 = \dots = \lambda_p$ et $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q = 0$

car B_E et B_F sont libres

Idée liée Pour trouver un supplémentaire de E donné, il suffit de compléter une base de E avec le thm de la base incomplète et on prend $F = \mathrm{Vect}(\text{vecteurs rajoutés})$

2. Projections et symétrie



def Soit $\mathbb{R}^n = E \oplus F$

1. La projection $p_{E/F}$ de $\mathbb{R}^n$ sur E suivant F

est l'application définie par

$$p_{E/F} : \mathbb{R}^n = E \oplus F \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \longmapsto p_{E/F}(\vec{u}) = \vec{v}$$

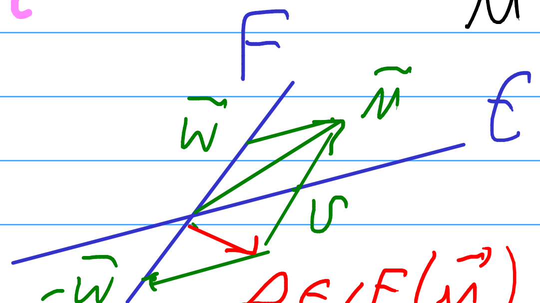
proj sur F suivant E

$$p_{E/F} \circ p_{E/F} = p_{E/F}$$

$$p_{F/E}(\vec{u}) = \vec{w}$$

2. La symétrie $s_{E/F}$ par rapport à E de direction F est l'app. définie par

$$s_{E/F} : \mathbb{R}^n = E \oplus F \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \longmapsto s_{E/F}(\vec{u}) = \vec{v} - \vec{w}$$



$s_{E/F}(\vec{u}) = \vec{v} - \vec{w}$

$$s_{E/F} \circ s_{E/F} = Id$$

Quelques propriétés générales

1) . On a $p_{E/F} + p_{F/E} = Id$

dém $\rightsquigarrow p_{F/E} = Id - p_{E/F}$

$$\underset{E}{\underset{\cap}{\vec{v}}} + \underset{F}{\underset{\cap}{\vec{w}}} = \vec{u}$$

avec $\vec{v} = p_{E/F}(\vec{u})$ et $\vec{w} = p_{F/E}(\vec{u})$

$\rightsquigarrow \vec{u} = p_{E/F}(\vec{u}) + p_{F/E}(\vec{u})$

2) p est une projection $\iff p^2 = p$

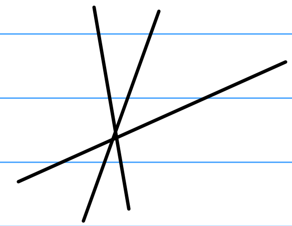
dém : $\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\vec{u}}} = \underset{E}{\underset{\cap}{\vec{v}}} + \underset{F}{\underset{\cap}{\vec{w}}} \rightarrow p(\vec{u}) = \vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$

$\mathbb{R}^n = E \oplus F \quad \longrightarrow p(\vec{v}) = \vec{v} = p(\vec{u}) = p^2(\vec{u})$

3) s est une symétrie $\iff s^2 = Id$

dém : $\underset{\in E}{\vec{u} = \vec{v}} + \underset{\in F}{\vec{w}} \to s(\vec{u}) = \vec{v} - \vec{w} \to s(s(\vec{u})) = \vec{v} - (-\vec{w})$
$= \vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$

$\to s^2(\vec{u}) = \vec{u} \to s^2 = Id$

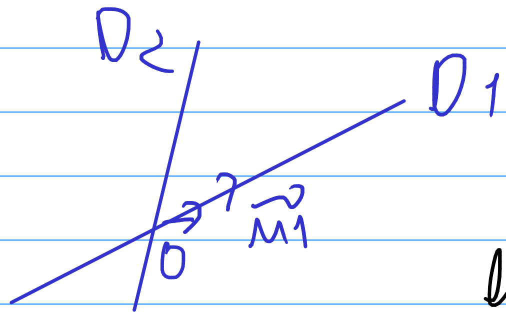


4) $s_{E/F} = p_{E/F} - p_{F/E}$
$= 2p_{E/F} - Id$

3. Exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Autre méthode de calcul de projection sur droites et plans

Dans $\mathbb{R}^2$



$D_1 = Vect(\vec{u}_1)$

et D_2 donnée par une équation
$ax + by = 0$ $= \ell(x,y)$

On considère l'app. linéaire

$l(x,y) = ax + by = l(\vec{u})$ avec $\vec{u} = (x,y)$

On a directement $\quad P_{D_1/D_2}(\vec{u}) = \dfrac{l(\vec{u})}{l(\vec{u}_1)} \times \vec{u}_1$

- Par exemple pour la projection orthogonale sur D_1

$\vec{u}_1 = (a,b) \quad \langle \vec{u}_1, \vec{u} \rangle = ax + by = l(\vec{u})$

Ici D_2 = orthogonal de D_1 $= \{\vec{u},\ \langle \vec{u}_1, \vec{u} \rangle = 0\}$

$\rightsquigarrow \quad P_{D_1}(\vec{u}) = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \times \vec{u}_1 = \langle \vec{u}, \vec{u}_1 \rangle \times \vec{u}_1$

si $\vec{u}_1$ est unitaire

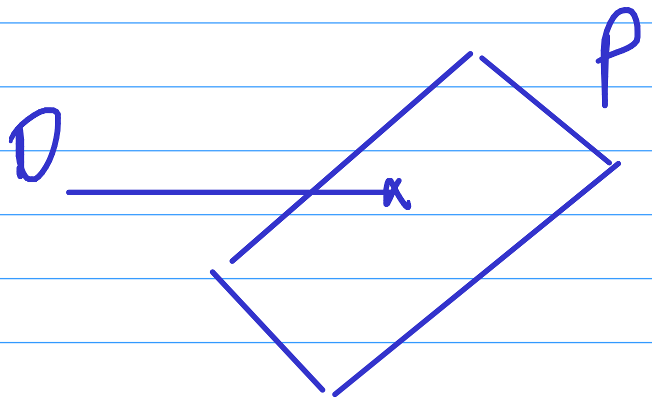
Dem de la formule Par linéarité $/\vec{u}$ il suffit de la vérifier sur $\vec{u}_1$ et D_2

$p_{D_1//D_2}(\vec{u_1}) = \vec{u_1} \overset{?}{=} \dfrac{\ell(\vec{u_1})}{\ell(\vec{u_1})} \times \vec{u_1} = \vec{u_1}$ OK

si $\vec{u_2} \in D_2$ $\quad p_{D_1//D_2}(\vec{u_2}) = \vec{0} \overset{?}{=} \dfrac{\ell(\vec{u_2})}{\ell(\vec{u_1})} \times \vec{u_1} = \vec{0}$ car $\vec{u_2} \in D_2 = \operatorname{Ker} \ell$

avec $\ell(\vec{u_1}) \neq 0$ car $\vec{u_1} \notin D_2 = \operatorname{Ker} \ell$

Dans $\mathbb{R}^3$ même idée



$D = \operatorname{Vect}(\vec{u_1})$

P donné par l'équation

$ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq \vec{0}$

On pose $\ell(x, y, z) = ax + by + cz$

On a la formule $\boxed{p_{D/P}(\vec{u}) = \dfrac{\ell(\vec{u})}{\ell(\vec{u_1})} \times \vec{u_1}}$ $(*)$

Il pour une projection orthogonale sur D

$\tilde{m}_1 = (a,b,c)$ $\quad D^\perp = P = \ker l = \{\vec{u}, \langle \vec{u}, \vec{m}_1 \rangle = 0\}$

avec $l(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{m}_1 \rangle = ax + by + cz$

$$P_D(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{m}_1 \rangle}{\|\vec{m}_1\|^2} \vec{m}_1$$

dem de (*) Elle marche sur D et P.

Question Comment calculer la projection sur le plan P?

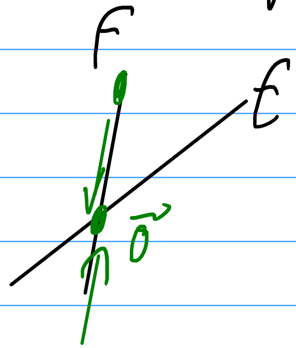
On a $P_{P/D} = Id - P_{D/P}$

$$\boxed{P_{P/D}(\vec{u}) = \vec{u} - \frac{l(\vec{u})}{l(\vec{m}_1)} \vec{m}_1}$$

Remarques si $\mathbb{R}^n = E \oplus F$

- $P_{E/F}$ peut-elle être un isomorphisme ?

$P_{E/F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\qquad Id^2 = Id$!



Id est une projection !

avec $\mathbb{R}^n = E$ et $F = \{\vec{0}\}$

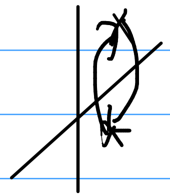
$\ker P_{E/F} = F$

$\neq \{\vec{0}\}$ en général

$\to$ $P_{E/F}$ pas surjectif $\to$ pas un isomorphisme

- $S_{E/F}$ peut-elle être un isomorphisme ?

Si oui, quel est son inverse $S_{E/F}^{-1}$ (réciproque)



$S_{E/F}(\vec{u}) = \underset{\text{donné}}{\vec{v}}$ $\rightsquigarrow$ $S_{E/F}(\underbrace{S_{E/F}(\vec{u})}_{=\vec{u}}) = S_{E/F}(\vec{v})$

$\vec{u} = S_{E/F}(\vec{v})$

$\rightsquigarrow \Delta_{E|F}^{-1} = \Delta_{E|F}$