Chap 7 Retour sur l'équation $AX = Y$

1. Généralités, Noyau, Image

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ app. linéaire

On étudie les équations de la forme $f(\underbrace{\vec{u}}_{\text{inconnu}}) = \underbrace{\vec{v}}_{\text{connu}} \in \mathbb{R}^n$ } pb vectoriel

si $A = \mathrm{Mat}(f)$ l'éq. s'écrit $AX = Y$ ← matriciel

⇝ 2 sev importants associés au problème

le noyau de f : $\ker f = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^p,\ f(\vec{u}) = \vec{0}\}$

l'image de f : $\mathrm{Im} f = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^p \text{ avec } f(\vec{u}) = \vec{v}\}$

Ce sont des notions vectorielles (ont un sens sans s'appuyer sur un choix de base)

Prop $\ker f$ est un sev de $\mathbb{R}^p$ (espace de départ)

$\mathrm{Im} f$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ (espace d'arrivée)

dem . si $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \ker f$ alors $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{0}$

$\rightsquigarrow \vec{u}+\vec{v} \in \ker f$

. si $\vec{u} \in \ker f$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) = \vec{0}$

$\rightsquigarrow \lambda \vec{u} \in \ker f$

. $\vec{0} \in \ker f$ car $f(\vec{0}) = \vec{0}$

$\ker f$ est un sev

Concrètement : $\ker f$ est donné par le système homogène $AX = 0$ avec $A = \mathrm{Mat}(f)$ et X coordonnées de $\vec{v}$

. $\mathrm{Im} f$ est un sev ? si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2 \in \mathrm{Im} f$

alors $\exists \vec{u}_1, \vec{u}_2$ tel que $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1$ et $f(\vec{u}_2) = \vec{v}_2$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) = f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \in \mathrm{Im} f$

si $\vec{v} \in \mathrm{Im} f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{v} = \lambda f(\vec{u}) = f(\lambda \vec{u}) \in \mathrm{Im} f$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Im} f$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

<u>Concrètement</u>. $\mathrm{Im} f = \{Y \in \mathbb{R}^n, \exists X \in \mathbb{R}^p, AX = Y\}$

pas si concret !

<u>Prop</u> $\mathrm{Im} f$ est le sev engendré par l'image de la base canonique : $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})$

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p}))$$

dem $\vec{v} \in \mathrm{Im} f \iff \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^p, f(\vec{u}) = \vec{v}$

$\vec{u} = \sum x_i \vec{e_i} \rightsquigarrow f(\vec{u}) = \sum x_i f(\vec{e_i}) = \vec{v}$

$\iff \vec{v}$ est C.L. de $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})$

<u>Conséquence</u> $\mathrm{Im} f$ est l'ev engendré par les colonnes de $A = \mathrm{Mat}(f)$ car ces colonnes sont les $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})$

Importance de ces espaces pour les équations linéaires de la forme $f(\vec{u}) = \vec{v}$

Prop: $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $\vec{v}$ donné dans $\mathbb{R}^n$

On étudie l'éq. $f(\vec{u}) = \vec{v}$ (E)

1. l'équation (E) a des sol. ssi $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$
2. si $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et si $f(\vec{u}_0) = \vec{v}$: $\vec{u}_0$ sol. particulière alors toutes les solutions de (E) sont les vecteurs $\vec{u}$ de la forme $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{w}$ avec $\vec{w} \in \operatorname{Ker} f$

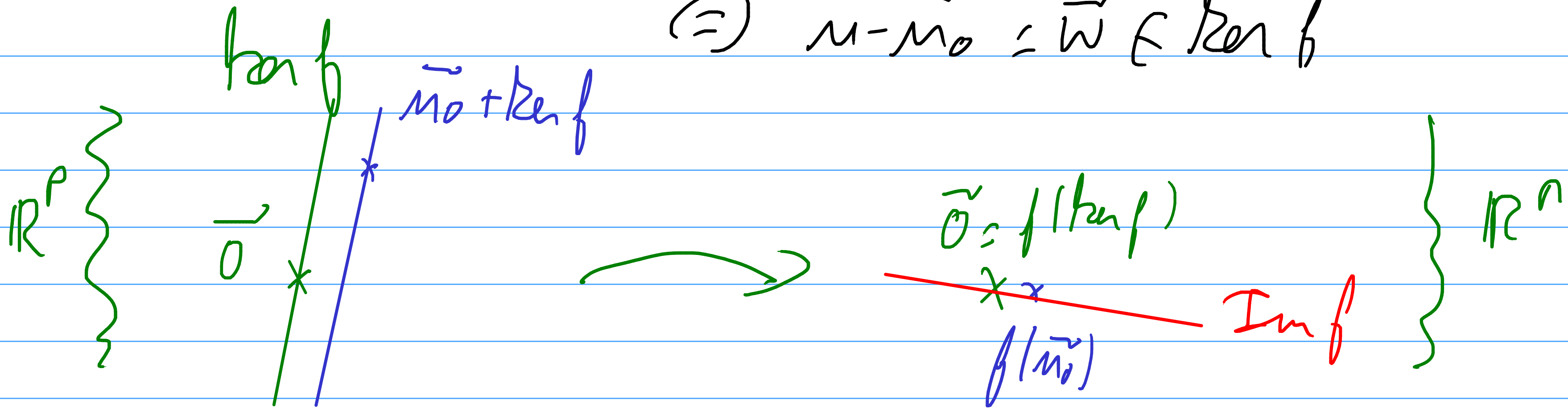
sol générale de l'équation sans second membre $f(\vec{w}) = \vec{0}$

dem (1) Clair par définition

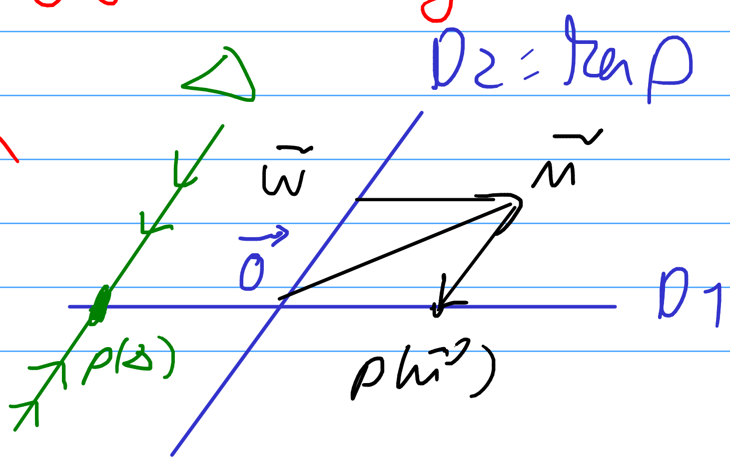
② si $f(\vec{u_0}) = \vec{v}$ alors $f(\vec{u}) = \vec{v} \iff f(\vec{u}) = f(\vec{u_0})$

$$\iff f(\vec{u}-\vec{u_0}) = f(\vec{u}) - f(\vec{u_0}) = \vec{0}$$

$$\iff \vec{u}-\vec{u_0} = \vec{w} \in \ker f$$



Une app. linéaire écrase les vecteurs qui sont dans la direction du noyau un peu comme dans une projection



2. Le théorème du rang

Thm du rang (Thm noyau-image)

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ app. linéaire

On a $p = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$

$\dim(\mathrm{Im} f) = \operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(\text{matrice de } f)$

avec comme convention $\dim \{\vec{0}\} = 0$

dem $\operatorname{rang} f = \dim(\mathrm{Im} f) = \dim$ ev engendré par les colonnes de $A = \mathrm{Mat}(f)$

$=$ nbre d'inconnues principales du syst $AX = 0$

de pivots de A échelonné

$\ker f = \{$solutions de $AX = 0\}$ $\quad X \in \mathbb{R}^p \to AX \in \mathbb{R}^n$

$\dim \ker f =$ nbre d'inconnues secondaires (ou non principales)

$p =$ nbre d'inconnues du syst $AX = 0$

$=$ nbre d'inconnues principales $+$ les autres

$$\underbrace{\text{nbre d'inconnues principales}}_{\text{rang } A = \text{rang } f = \dim(\operatorname{Im} f)} + \underbrace{\text{les autres}}_{\dim \ker f}$$

3. Un exemple

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à $A = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{array}$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Q1 : Trouver $\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rang} f$, $\dim \ker f$

Q2 : Trouver des bases pour ces espaces

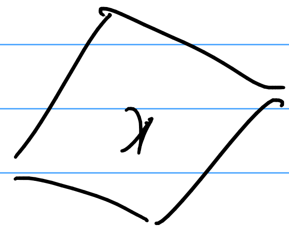
Pour Im f   On échelonne A pour calculer rang A

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Q1 $\rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} f = 2$

de plus on sait que Im f est le plan engendré par les 2 1ères colonnes de A

Q2 $$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$$



$P = \operatorname{Im} f$

Pour Ker f on a par le thm du rang

$$3 = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Ker} f + 2$$

$\leadsto \dim \operatorname{Ker} f = 1$ $\leadsto$ Ker f est une droite de $\mathbb{R}^3$

Pour trouver une base de $\ker f$ il faut résoudre le système $AX = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 7z = 0 \\ -3y - 6z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \quad (L2) \\ x = -4y - 7z = 8z - 7z = z \end{cases}$$

z qq

$X = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$

$\ker f$ = droite engendrée par $\vec{u} = (1, -2, 1)$

Remarque $(1,-2,1) \in \ker A \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$

$C_1 = Ae_1$

$C_2 = Ae_2$

$C_3 = Ae_3$

relation de dépendance entre les colonnes de A

4. Conséquences du thm du rang

Prop ① f linéaire est injective ssi $\ker f = \{\vec{0}\}$ ($\Leftrightarrow \dim \ker f = 0$)

② $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est surjective ssi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \operatorname{rang} f = n$

s'utilise avec le thm du rang

dem de la prop

① si $f(u_1) = f(u_2) \Leftrightarrow f(u_1 - u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in \ker f$

. si $\ker f = \{\vec{0}\}$ alors $u_1 = u_2$ et f est injective

. si $\vec{u} \neq \vec{0} \in \ker f$ avec $f(\vec{u}) = f(\vec{0})$ et f n'est pas injective

② par définition f surjective ssi tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $\vec{y} = f(\vec{x})$
$\Leftrightarrow$ tout $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ appartient à $\operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$

Proposition $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire

a) On a toujours $\operatorname{rang} f \leq p$ et $\leq n$

et $\operatorname{rang} f = p \iff f$ injective

$\operatorname{rang} f = n \iff f$ surjective

b) si f est injective alors $p \leq n$

c) si f est surjective alors $p \geq n$

d) si f est bijective alors $p = n$

e) Réciproquement si $p = n$ alors f bijective

si f est surjective ou injective

exemples $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ f injective possible ? non

$p = 3 > n = 2$ surjective possible ? oui

exemple $f(x, y, z) = (x, y)$.

<u>dem</u> a) Rappel: rang f = dim $(\mathrm{Im} f)$

Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg} f \leq n = \dim \mathbb{R}^n$

c) avec rang $f = n$ ssi f surjective

suite du a)

a) suite avec le thm du rang !

On a $p = \mathrm{rang}(f) + \dim(\mathrm{Ker} f)$

$\Leftrightarrow \mathrm{rang}(f) = p - \dim(\mathrm{Ker} f) \leq p$

avec égalité ssi $\dim(\mathrm{Ker} f) = 0 \Leftrightarrow f$ injective