VI Sous-espaces vectoriels, bases (repères) et dimension

1. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

déf : Une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel (sev en abrégé) si

i) $\vec{0} \in E$

ii) $\forall \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{v} \in E$

iii) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in E$ on a $\vec{v} + \vec{w} \in E$

Les droites et les plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$ sont des sev de $\mathbb{R}^n$

On rencontre des sev de $\mathbb{R}^n$ dans 2 situations typiques

1. L'ensemble des solutions X d'un système homogène $AX = 0$ est un sev de $\mathbb{R}^{n}$ avec n = nbre d'inconnues = taille de X

ex
$$(S)\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$$
définit un sev de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

une solution de S est un vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant (S)

$\rightsquigarrow$ Sol(S) est une partie de $\mathbb{R}^{③}$!

3 = nbre d'inconnues de S

On montre que Sol(S) est un sev de $\mathbb{R}^3$.

i) $\vec{0} = (0,0,0)$ est solution (marche pour tout système homogène)

$\rightsquigarrow \vec{0} \in E = Sol(S)$

ii) si $v = (x,y,z) \in E = Sol(S)$

et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

satisfait $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = 0 \\ \lambda x - \lambda y + 2\lambda z = \lambda(x-y+2z) = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \lambda v \in E$

iii) si $v = (x,y,z)$ et $w = (x',y',z')$ solutions de S

$v+w = (x+x', y+y', z+z')$ est encore solution de S

$\begin{cases} (x+x')+(y+y')+(z+z') = x+y+z+x'+y'+z' = 0+0 = 0 \\ \text{idem} \end{cases}$

déf $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire

l'ensemble $\operatorname{Ker} f = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n ;\ f(\vec{v}) = \vec{0}\}$

s'appelle le noyau de f (kernel)

Propriété $\operatorname{Ker} f$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

dem i) On a toujours $f(\vec{0}) = \vec{0}$
$\rightarrow \vec{0} \in \ker f$

ii) si $\vec{v} \in \ker f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) = \lambda \times \vec{0} = \vec{0} \rightarrow \lambda \vec{v} \in \ker f$

iii) si $\vec{v}$ et $\vec{w} \in \ker f$ alors
$f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
$\rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in \ker f$

$\rightarrow \ker f$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

2. On se donne une collection (ou famille) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$
et on considère l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$ de ces vecteurs
C'est un sev de $\mathbb{R}^n$ noté $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$

exemples si on se donne $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^n$
$\mathrm{Vect}(\vec{v}_1) = \{\lambda \vec{v}_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la droite engendrée par $\vec{v}_1$ si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$.

$\vec{0} = \underset{\lambda}{\underset{\parallel}{0}} \times \vec{v}_1 \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1)$

Si on se donne $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$
avec $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ non colinéaires
alors $Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \{\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ quelconques $\}$
est le plan engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

2. Bases et coordonnées

La notion de sev est abstraite !
On va associer à un sev E de $\mathbb{R}^n$ des systèmes de coordonnées $\vec{v} \in E \rightsquigarrow$ collection optimale de nombre réels

Pour cela il faut fabriquer des repères ou des bases de E.

def Soit E un sev de $\mathbb{R}^n$

- On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ de E est une base de E ssi tout vecteur $\vec{v}$ de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$$

- Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ s'appellent les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Notation $v = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)_B$

Exemples

$B_{can} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est bien une base de $\mathbb{R}^n$

si $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

on a $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

Ici les coordonnées de v dans B_{can} sont $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont aussi les composantes de v dans ce cas

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$
$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

Attention ce n'est pas le cas en général

Exemple Soit $B = (v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1))$

Q1 : B est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Q2 : Si oui, quelles sont les coordonnées de $v = (x, y)$ dans la base B ?

solution : $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné qq

Peut-on trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v \text{ ?}$$

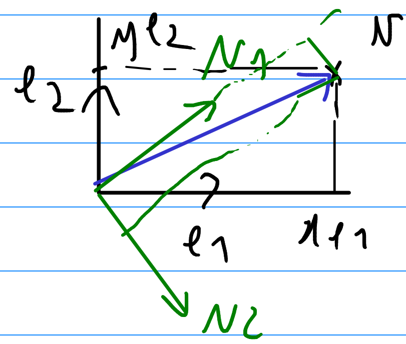
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - \lambda_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\lambda_1 = x+y \\ 2\lambda_2 = x-y \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{x+y}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{x-y}{2}$$

$\rightsquigarrow B = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

et les coordonnées de $v = (x,y)$ dans B sont

$$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \rightsquigarrow v = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)_B$$



Quelles sont les coordonnées de $v_1 = (1,1)$ dans la base $B = (v_1, v_2)$?

$v_1 = (1,1) = 1 \times v_1 + 0 \times v_2$

$\rightarrow$ coordonnées $(1, 0)$ dans B !

Conclusion les coordonnées d'un vecteur donné dépendent du repère (de la base) choisi !

Exemples des droites et des plans

. D droite est toujours engendrée par un seul vecteur $v \neq 0$ $\quad D = \{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$

⇝ $\mathcal{B}=(v)$ est une base de D ! (si $v\in D$ et $v\neq 0$)

exemple $v=(1,2,3)$ engendre une droite D

Question coordonnée de $u=(-2,-4,-6)\in D$ dans la base $\mathcal{B}=(v)$ de D

$\mathcal{B}$ n'a qu'un seul élément

⇝ les vecteurs de D n'ont qu'une seule coordonnée dans cette base !

Ici $u=(-2,-4,-6)=-2\times(1,2,3)$
$= -2\times v$

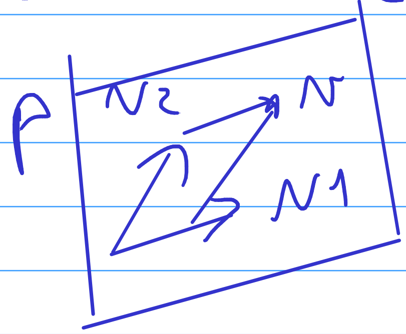
⇝ $u=(-2)_{\mathcal{B}}$! coordonnée -2 dans $\mathcal{B}$!

Pour les plans vectoriels ?

Rappel : un plan $P=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$

avec v_1 et v_2 non colinéaires $\in\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4\ldots$

Un vecteur v de P s'écrit $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2$



(λ_1,λ_2) sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ de P

Remarque : Il faut dire pourquoi $B = (v_1, v_2)$ est une base de P

Il faut montrer que λ_1 et λ_2 sont uniques pour v donné dans P

dem si $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1' v_1 + \lambda_2' v_2$

$\iff (\lambda_1 - \lambda_1') v_1 = (\lambda_2' - \lambda_2) v_2$

$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_1' = 0 = \lambda_2' - \lambda_2$ car sinon v_1 et v_2 seraient colinéaires.

Question coordonnées de $v_1 - v_2 \in P$ dans la base $B = (v_1; v_2)$ de P ?

$v = v_1 - v_2$ $\qquad$ $v = (1, -1)_B$

$1, -1$

3. Notion d'indépendance linéaire

Dans une base $B = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ aucun des vecteurs v_1, v_2 ou v_p n'est combinaison linéaire des autres vecteurs

Par exemple si $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p$

$\iff 1\times v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_p v_p = 0$

et $0\times v_1 + 0\times v_2 + \dots + 0\times v_p = 0$

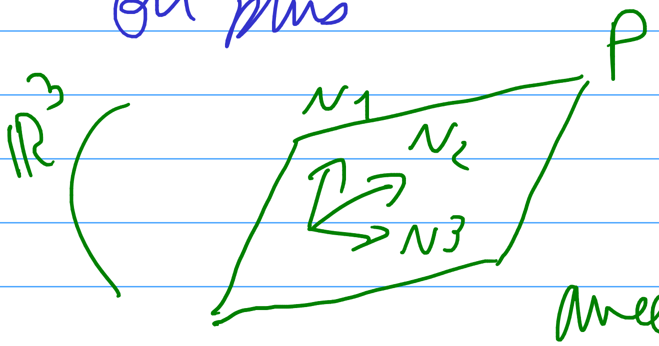
$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 0\ ! \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_p = 0 \end{cases}$ par unicité des coordonnées dans une base.

def On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ est <u>libre</u> (ou <u>linéairement indépendante</u>) si

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

Remarques si $\mathcal{F} = (v_1, v_2)$ est libre ssi v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

mais notion plus générale pour $\mathcal{F}$ à 3 vecteurs ou plus



$\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ dans un plan P

avec (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3) non colinéaires 2 à 2

La famille $\mathcal{F}$ n'est jamais libre!

En effet $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ sera une base de P

$\rightsquigarrow v_3 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = P$

$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \iff \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \underbrace{-}_{\lambda_3 = -1 \neq 0} v_3 = 0$

$\rightarrow$ F pas libre

Prop Une famille de vecteurs $B = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ de E est une base de E ssi

B est libre

et B est générative de E

dem. • B est générative de E

$\iff$ tout v de E s'écrit sous la forme

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$ au moins d'une façon

• B est libre

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$ d'une façon au plus

en effet si $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$

$= \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \dots + \lambda'_p v_p$

$\iff \underbrace{(\lambda_1 - \lambda'_1)}_{=0} v_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda'_2)}_{=0} v_2 + \dots + \underbrace{(\lambda_p - \lambda'_p)}_{=0} v_p = 0$

$\Rightarrow$ si B est libre

4. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Thm Soit E un sev non nul de $\mathbb{R}^n$. Alors toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.
Ce nombre entier s'appelle la dimension de E et se note $\dim E$.
Et on a ici $\dim E \leq n$ si E sev de $\mathbb{R}^n$

Exemples • $\dim \mathbb{R}^n = n$
car $B_{can} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ a n vecteurs.

• Q1 : dimension d'une droite dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^{1000}$?

car $B = (v)$ avec $v \in D$, $v \neq 0$ est une base de D $\rightarrow$ $\dim D = 1 = Card(B)$

• Q2 : dimension d'un plan P de $\mathbb{R}^3$
$\dim P = 2$ car P possède des bases à 2 vecteurs

Démonstration du Thm

Idée utiliser des app. linéaires et des isomorphisme (app. linéaires bijectives)

def $B = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E sev de $\mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ une app. "combinaison linéaire suivant B"

$L_B : \mathbb{R}^p \rightarrow E$

$X = (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto L_B X = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p$

Prop L_B est un isomorphisme ssi B est une base de E

Lorsque B est une base de E, l'application réciproque de L_B

$C_B = L_B^{-1} : E \rightarrow \mathbb{R}^p$

$\vec{v} \mapsto L_B^{-1}(\vec{v}) = X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

coordonnées de $\vec{v}$ dans la base B

utilisation pour le thm

On se donne B et B' deux base de E sev de $\mathbb{R}^n$

On pose $k = \underbrace{\text{Card}}_{\text{cardinal = nbre d'éléments}} B$ et $p = \text{Card } B'$

$C_B \circ L_{B'} : \mathbb{R}^p \xrightarrow{L_{B'}} E \xrightarrow{C_B} \mathbb{R}^k$

une bijection car $L_{B'}$ et C_B le sont

$P_{B,B'} = C_B \circ L_{B'} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$ est un isomorphisme

$\rightsquigarrow$ $\underset{\text{Card } B'}{\overset{\shortparallel}{p}} = \underset{\text{Card } B}{\overset{\shortparallel}{k}}$ ($\text{Mat}(P_{B,B'})$ est une matrice inversible $\to$ de taille carrée)

- si $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\dim E = d$

On a : $L_B : \mathbb{R}^d \to E \subset \mathbb{R}^n$

avec L_B injective

$\rightarrow$ $d = \dim E \leq n$.

5. Calculs de dimensions et de bases

$\mathbb{R}^n$ On a $\dim \mathbb{R}^n = n$ $\quad B_{can} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$\rightsquigarrow$ toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ ont n vecteurs

Question Comment savoir si n vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$ forment une base ?

exemple : $u_1 = (1,0,0)$ $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (1,1,2)$ base de $\mathbb{R}^3$?

Thm $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ famille des n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ssi la matrice

$$P = \left(u_1 \middle| u_2 \middle| \cdots \middle| u_n \right)$$ est de rang n

(nbre de pivots de P une fois échelonné.

dem $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ssi l'app. linéaire

$$L_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto L_F X = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

est un isomorphisme

ssi $\mathrm{Mat}(L_F)$ est de rang n.

$$\mathrm{Mat}(L_F) = \left(u_1 \middle| u_2 \middle| \cdots \middle| u_n \right)$$

Remarque pour trouver les coordonnées X d'un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ donné il faudra résoudre

$$L_{\mathcal{F}}(X) = v = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

$$X = L_{\mathcal{F}}^{-1}(v)$$

Exemple $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (1,1,1)$
base de $\mathbb{R}^3$?

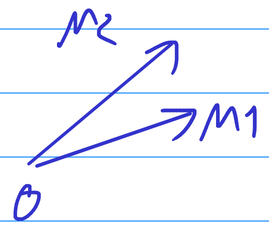
$$\mathrm{Mat}(\mathcal{L}_F) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \end{array}$$

déjà échelonné
de rang 3
($\rightarrow$ inversible)

$\rightsquigarrow$ $F = (u_1, u_2, u_3)$ base de $\mathbb{R}^3$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$

A quelle condition $u_1 = (a,b)$, $u_2 = (c,d)$
forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?



$B = (u_1, u_2)$ base de $\mathbb{R}^2$ ssi

$$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

ssi $\det P = ad - bc \neq 0$.

ex: $u_1 = (1,2)$ $u_2 = (3,4)$ base de $\mathbb{R}^2$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6$
$= -2 \neq 0$

Exemple $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$
(Wims)

$$\mathrm{rang}\, P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow B = (u_1, u_2, u_3) \text{ base de } \mathbb{R}^3.$$

ex : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ rang 3 si $c \neq 0 \rightsquigarrow$ base
rang 2 si $c = 0 \rightsquigarrow$ pas base.

Base et dimension d'un sev engendré par une famille de vecteurs

Thm $E = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ un sev de $\mathbb{R}^n$ engendré par p vecteurs.

dim E ? base de E ?

Méthode : On écrit le système homogène associé (S) $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$

(S) a p inconnues et n équations

concrètement (S) $\Leftrightarrow$ $AX = 0$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} | & | & | & | \end{pmatrix} \end{array} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$$

On a dim E = rang A (nbre d'inconnues principales) et base de E = les vecteurs v_i correspondant aux inconnues principales.

Exemple $v_1 = (1,2,3)$ $v_2 = (4,5,6)$ $v_3 = (7,8,9)$

$E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

Q1 dim E ?

Q2 base de E ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$ On sait que dim E = rang A

$$\text{rg}\, A = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \,!$$

$\Rightarrow$ dim $E = 2$ = rang $A = 2$

$\Rightarrow$ E un plan de $\mathbb{R}^3$.

base de E ? inconnues principales 2 premières colonnes

base de E $\Rightarrow$ v_1 et v_2.

v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2 !

si on écrit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

il existe une solution avec $\lambda_3 = -1$ par exemple (inconnue non principale)

$\lambda_3 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = -4\lambda_2 - 7\lambda_3 = -1$

$-v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow \underline{v_3 = -v_1 + 2v_2}$

dém du Thm

$E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0 \qquad (S)$

On note I les indices correspondant aux inconnues principales

J les autres

Pb Montrer que $B = \{v_i, i \in I\}$ base de E ?

① . B est-elle génératrice de E ?

② . B est-elle libre.

① soit $j \in J$, il faut montrer que $v_j \in \mathrm{Vect}(v_i)_{i \in I}$

Il existe une solution de (S) avec $\lambda_j = 1$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i + v_j = 0 \leadsto v_j = -\sum \lambda_i v_i \in \mathrm{Vect}\, B$$

② On suppose que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0 = \sum_I \lambda_i v_i + \sum_J 0 \times v_j$

Solution de (S) avec inconnues non principales

$\lambda_j = 0 \Rightarrow$ c'est la solution nulle $\Rightarrow \lambda_i = 0$

B est libre. $\square$

Thm dimension d'un sev défini par un système homogène

$E = \mathrm{Sol}(S)$ $\quad S$ système linéaire homogène

Alors $\dim E$ = nbre d'inconnues $\boxed{\text{non principales}}$ du système

A chaque inconnues non principale est associée un vecteur de E $\rightsquigarrow$ base de E.

Attention de ne pas confondre avec le thm précédent !

Exemple. $\mathbb{R}^2$ $x+2y=0$ x inconnue principale

y non principale $\to 1$

$\rightsquigarrow \dim E = 1 \rightsquigarrow E$ est une droite de $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$ $E = \{\underset{\overset{\shortparallel}{v}}{(x,y,z)} \in \mathbb{R}^3,\ x+2y+3z=0\}$

y, z non principales $\to 2$

$\dim E = 2$ E est un plan

base de E s'obtient en faisant $\boxed{y=1, z=0}$ $\rightsquigarrow x=-2$

$v_1 = (-2, \boxed{1,0})$

et $\boxed{y=0, z=1}$ $\rightsquigarrow x=-3$

$v_2 = (-3, \boxed{0,1})$

Tout v de E s'écrit $v = yv_1 + zv_2 = (-2y-3z, y, z)$
$= y(-2,1,0) + z(-3,0,1)$

$\mathbb{R}^4$ $E = \{v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + \underbrace{2y+3z+4t}_{} = 0\}$

non principales $\to 3$

$\dim E = 3$

base de E ? $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$

$v_2 = (-3, 0, 1, 0)$

$v_3 = (-4, 0, 0, 1)$

Par rapport au thm précédent ici plus (S) a des inconnues non principales plus $E = Sol(S)$ est gros !

les inconnues non principales servent de paramètres pour les solution de (S) → vecteurs de E

plus il y a de paramètres libres plus E est gros.

Exemple $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ $v_2 = (2, 3, 4, 5)$

$v_3 = (3, 4, 5, 6)$ $v_4 = (4, 5, 6, 7) \in \mathbb{R}^4$

$E = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \subset \mathbb{R}^4$ $v_5 = (5, 6, 7, 8)$

(S) associé $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = 0$

Que vaut $\dim E$?

Thm ⇒ $\dim E = \text{rang}(S)$ ici car E présenté par famille génératrice

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & & & & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

ici

$$\text{rang} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2 inconnues principales

$\rightsquigarrow$ $\dim E = 2$ base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$

E est un plan de $\mathbb{R}^4$

si $F = Sol(S) \subset \mathbb{R}^5$

une solution de (S) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$

$\dim F$ = nbre d'inconnues non principales de (S)

$= 3$

Extraction et complétion de bases

Thm extraction de base

Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice d'un ev non nul E. Alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ une sous-famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ qui soit une base de E.

déjà vu ! $E = Vect(\mathcal{F})$ premier thm du paragraphe précédent

On garde les vecteurs correspondant aux inconnues principales du système

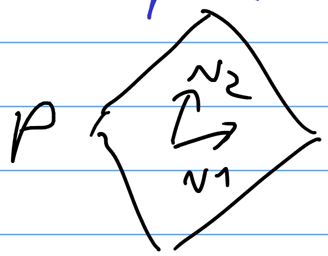
$\sum \lambda_i v_i = 0$ si $\mathcal{F} = (v_i, i \in I)$

Thm de la base incomplète

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_q)$ une famille libre d'un espace E muni d'une famille génératrice $G = (g_1, \dots, g_p)$

Alors on peut compléter la famille libre $\mathcal{F}$ à l'aide de certains vecteurs de G pour fabriquer une base de E.

Exemple dans $\mathbb{R}^3$



$\mathcal{F} = (v_1, v_2)$ 2 vecteurs déjà donnés non colinéaires de $\mathbb{R}^3$

On voudrait compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant des vecteurs les plus simples possibles

On va utiliser $G = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

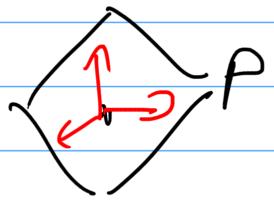
D'après le thm on peut compléter $\mathcal{F}$ à l'aide de e_1, e_2 ou e_3 pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut prendre $\mathcal{B} = (v_1, v_2, e_1)$ ssi $e_1 \notin P = \text{Vect}(v_1, v_2)$

(v_1, v_2, e_2) ssi $e_2 \notin P$

(v_1, v_2, e_3) ssi $e_3 \notin P$

exemple P $(x+y+z=0)$ $\begin{cases} v_1 = (-1,1,0) \\ v_2 = (-1,0,1) \end{cases}$



(v_1,v_2,e_1), (v_1,v_2,e_2), (v_1,v_2,e_3) bases

dem du thm : on fait $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}$ (famille génératrice de E) et on utilise le thm précédent pour trouver une base (on garde $\mathcal{F}$ inconnues principales)

6. Conséquences utiles

Thm (cardinal des familles de vecteurs et dimension)

Soit E un ev de dimension n.
$\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors

a) $\mathcal{F}$ libre $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathrm{Card}(\mathcal{F})}_{\text{nbre d'éléments de } \mathcal{F}} \leq n = \dim E$

b) $\mathcal{F}$ génératrice $\Rightarrow$ $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \geq n = \dim E$

c) Si $\mathcal{F}$ génératrice et $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n$ alors c'est une base de E

d) Si $\mathcal{F}$ libre et $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n$ alors c'est une base de E