V Isomorphismes et matrices inversibles (suite et fin)

4. Le cas des matrices 2x2

Thm Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ est inversible ssi son déterminant

$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

dem $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

l'équation $AX = Y$ avec donné

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a x_1 + c x_2 = y_1 & L_1 \\ b x_1 + d x_2 = y_2 & L_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $dL_1 - cL_2$ $\quad (ad - bc) x_1 = d y_1 - c y_2$

$aL_2 - bL_1$ $\quad (ad - bc) x_2 = -b y_1 + a y_2$

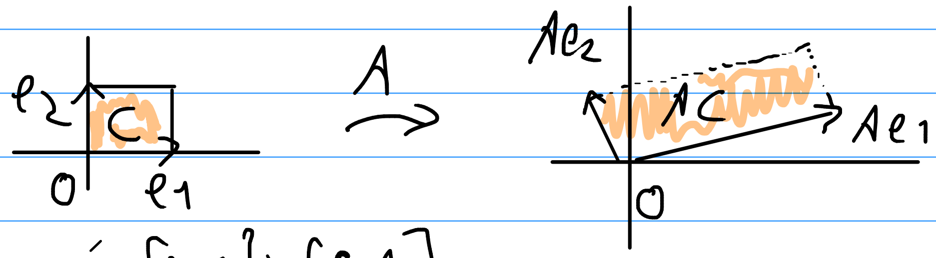
$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\det A}(d y_1 - c y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\det A}(-b y_1 + a y_2) \end{cases}$ si $\det A \neq 0$

on vérifie à la main que ces solutions marchent bien.

Si $\det A = 0$ $\quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

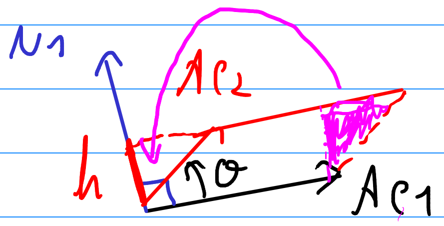
$\rightarrow$ A pas injective si b ou $d \neq 0$.

Thm Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ alors $\det A$ est l'aire orientée du parallélogramme AC de côtés Ae_1 et Ae_2



C carré $[0,1]\times[0,1]$

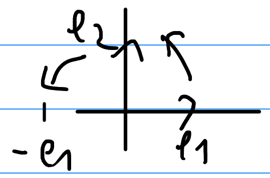
dém: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $Ae_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $Ae_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$



v_1 = rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de Ae_1

Question : quelles sont les coordonnées de v_1 ?

Matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: $R_{\frac{\pi}{2}}$?



$R_{\frac{\pi}{2}} e_1 = e_2$ $R_{\frac{\pi}{2}} e_2 = -e_1$

$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ remarque $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Ici $v_1 = R_{\frac{\pi}{2}}(Ae_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

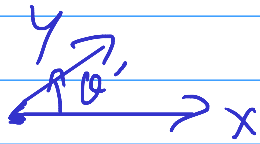
Aire du parallélogramme de côté Ae_1 de hauteur h est $\|Ae_1\| \times h$ $= \|Ae_1\|\|Ae_2\| \sin\theta$

$h = \|Ae_2\| \sin\theta$

Que vaut le produit scalaire $\langle v_1, Ae_2\rangle$?

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|X\| \|Y\| \times \cos \theta'$$



Ici $N_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ $\quad Ae_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\langle N_1, Ae_2 \rangle = -bc + ad = \det A = \|N_1\| \|Ae_2\| \cos \theta'$$

avec $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$

avec $\cos \theta' = \sin \theta$

et $\|N_1\| = \|R_{\frac{\pi}{2}}(Ae_1)\| = \|Ae_1\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\rightsquigarrow \det A = \|Ae_1\| \|Ae_2\| \sin \theta =$ aire $(A\,C)$