Isomorphisms et matrices inversibles

15 Feb 2021

Rappel / Déf : $\boxed{\text{un isomorphism est une application linéaire bijective}}$

- une application est bijective si elle est injective et surjective.

- Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, alors sa réciproque est notée $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Prop : Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, alors son appl. réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est aussi une applic. linéaire.

Démonstration : Supposons $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme (appl linéaire bijective). Soient $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f\left(f^{-1}(\vec{v_1}) + \lambda f^{-1}(\vec{v_2})\right) = f(f^{-1}(\vec{v_1})) + \lambda f(f^{-1}(\vec{v_2}))$$

$$= \vec{v_1} + \lambda \vec{v_2}$$

$\cap$ $\mathbb{R}^n$

Car f est une application linéaire

Donc, $f^{-1}(\vec{v_1} + \lambda \vec{v_2}) = f^{-1}(\vec{v_1}) + \lambda f^{-1}(\vec{v_2})$

c-à-d f^{-1} est une application linéaire

Rappel : Si f est une bijection ($X \to Y$) et f^{-1} est sa réciproque ($Y \to X$)

$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in X$, $\quad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Théorème :

1) Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une appl. injective, alors $p \leq n$

2) Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ un isomorphisme, alors $p = n$

Démostration :

Rappel : $\star$ Si (S) est système linéaire à n equations, p inconnues et de rang r. Alors $r \leq n$, $r \leq p$, et on a

	$r = p$	$r < p$
$r = n$	solution unique	infinité de solutions
$r < n$	au plus une sol.	pas de solut. ou infinité des sol.

système de Cramer

Remarque Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une appl. linéaire. On a

$$f(\underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_p)}_{\in \mathbb{R}^p}) = \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Donné $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

On a une système à n équat. et p inconnues

$$\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{Mat}(f)}_{\in M_{n,p}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{f(\underset{\sim}{\vec{v}}) = \underset{\in \mathbb{R}^n}{\vec{0}}}$ $\leftarrow$ On a une système à n equation et p inconnues $v_1, v_2, \dots, v_p$ qui est compatible.

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

$f(\underset{\sim}{\vec{0}}) = \vec{0}$

si $\boxed{p > n}$ (le nombre des inconnues est plus grande le nombre des équations) on aura une infinité des solutions, car on va trouver des inconnues secondaires.

Mais f est injective, donc c'est une contradiction.

Alors $p \leq n$.

$\boxed{2}$ si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, alors f est injective, donc en utilisant la partie $\boxed{1}$, on a $\boxed{p \leq n}$. On a aussi $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ qui est injective, donc $\boxed{n \leq p}$.

Donc $P = n$.

$\blacksquare$

Remarque : Il n'existe pas des isomorphismes entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Matrices inversibles

Définition Une matrice carré $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite inversible si l'application linéaire associée

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad X \longmapsto AX$$

est un isomorphisme. C'est-à-dire pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, l'équation $AX = Y$ possède une uniq. solution.

Si A est inversible, on note $A^{-1} := \mathrm{Mat}(f_A^{-1})$ la matrice de l'application réciproque de f_A.

Remarque : si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme

alors $p = n$ $\qquad \mathrm{Mat}(f) \in M_{n,p}(\mathbb{R}) = \underset{\underset{M_n(\mathbb{R})}{\parallel}}{M_{n,n}(\mathbb{R})}$

donc $\mathrm{Mat}(f)$ est une matrice carré.

Proposition : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice inversible. Alors, on a

1) $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$

2) $A A^{-1} = A^{-1} A = I_n$ ← matrice identité de taille n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration :

1) $\underbrace{AX}_{= f_A(X)} = Y$ possède une unique solution (car A est inversible)

$\Leftrightarrow X = f_A^{-1}(Y)$

$\Leftrightarrow X = \mathrm{Mat}(f_A^{-1})\, Y \Leftrightarrow X = A^{-1} Y$

2) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ $\qquad AA^{-1}Y = A(\underbrace{A^{-1}Y}_{X}) = AX = Y$

$$\boxed{A^{-1}Y = X \underset{①}{\iff} AX = Y}$$

Donc $\boxed{AA^{-1} = I_n}$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ $\qquad A^{-1}\underbrace{AX}_{Y} = A^{-1}(AX) = A^{-1}Y = X$

$$AX = Y \underset{①}{\iff} X = A^{-1}Y$$

Donc $\boxed{A^{-1}A = I_n}$

On peut aussi dire :

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad\qquad Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\quad X \longmapsto AX \qquad\qquad\qquad\qquad X \longmapsto X$$

on sait que

$$f_A \circ f_A^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n} \qquad \left(\text{car } f_A \text{ est un isomorphisme}\right)$$

$$\hookrightarrow \quad \mathrm{Mat}(f_A \circ f_A^{-1}) = \mathrm{Mat}(Id_{\mathbb{R}^n})$$

$$\|$$

$$A \cdot A^{-1} = \mathrm{Mat}(f_A) \cdot \mathrm{Mat}(f_A^{-1}) = I_n$$

Critères d'inversibilité

A est une matrice inversible $\Longleftrightarrow$ l'éq. $AX = Y$ $\{(S)$ a une solution unique.

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$\Longleftrightarrow$ (S) est un système carré dont toutes les inconnues sont principales.

$\Longleftrightarrow$ $\text{rang}(S) = n$

Thm: Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\text{rang}(A) = n$

Exemple: On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1) A est-elle inversible ?

2) Si oui, calculer son inverse.

$\boxed{1}$

Or $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3$$

Alors A est inversible.

$\boxed{2}$

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

On doit arriver à ce système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A^{-1} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1} + x_2 = y_1$$

$$(\cancel{x_1} + 2x_2 + x_3) - (\cancel{x_1} + x_2) = y_2 - y_1$$

$$(\cancel{2x_1} + 3x_2 + 2x_3) - 2(\cancel{x_1} + x_2) = y_3 - 2y_1$$

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 = y_1 \\ \boxed{x_2} + x_3 = y_2 - y_1 \\ x_2 + 2x_3 = y_3 - 2y_1 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1} + x_2 = y_1$$

$$\boxed{x_2} + x_3 = y_2 - y_1$$

$$\boxed{x_3} = y_3 - y_2 - y_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3$$

$$x_2 = 2y_2 - y_3$$

$$x_3 = -y_1 - y_2 + y_3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vérifier :

$A A^{-1} = A^{-1} A = I_3$

Méthode d'inversion avec matrice augmentée

Si A est de taille n, on part de la matrice augmentée $(A \mid I_n)$. On l'échelonne par la méthode du pivot.

Si A est inversible, on va arrive à la matrice

$$(I_n \mid A^{-1})$$

EXEMPLE : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

On considère la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

A^{-1} !

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

I_3

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$!

* Le cas des matrices 2×2

Thm : Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son déterminant $\det(A) := ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Or $\det(A) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \neq 0$, alors

A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_2$