IV Opérations sur les matrices et les app. linéaires

1. Structure d'espace vectoriel

Notations générales

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des app. linéaires $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

$\wr$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes

Somme si $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

on définit $(f+g)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + g(\vec{v})$

$\rightsquigarrow f+g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

$\sim$ somme de matrices de même taille

$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
$B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

par contre $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'existe pas !

$(1\,2\,3) + (1\,0)$ n'existe pas

propriété $\quad Mat(f+g) = Mat(f) + Mat(g)$

Multiplication par un scalaire (nombre) λ

$$(\lambda f)(\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

exemple $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

2. Composition d'app. linéaires et multiplication de matrices

Composition d'app. linéaires

Si $\quad f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n \quad g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

on peut définir l'application composée

$$f \circ g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{v} \mapsto f(g(\vec{v}))$$

$$(f \circ g)(\vec{v}) = f(g(\vec{v}))$$

condition : l'espace d'arrivée de $g = \mathbb{R}^q$
= espace de départ de f

Propriété si f et g sont linéaires alors $f \circ g$ aussi.

démonstration

$$(f\circ g)(\vec{u}+\vec{v}) = f(g(\vec{u}+\vec{v})) = f(g(\vec{u})+g(\vec{v}))$$
$$= f(g(\vec{u})) + f(g(\vec{v}))$$
$$= (f\circ g)(\vec{u}) + (f\circ g)(\vec{v})$$

$$(f\circ g)(\lambda\vec{u}) = f(g(\lambda\vec{u})) = f(\lambda g(\vec{u}))$$
$$= \lambda f(g(\vec{u}))$$
$$= \lambda (f\circ g)(\vec{u})$$

Produit de matrices

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n) \rightsquigarrow A = \mathrm{Mat}(f) \in M_{n,q}(\mathbb{R})$

$g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \rightsquigarrow B = \mathrm{Mat}(g) \in M_{q,p}(\mathbb{R})$

Problème : calculer $\mathrm{Mat}(f\circ g) = C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$??

Réponse par définition la jième colonne de C

$C_j = (f\circ g)(\vec{e_j})$ écrit en colonne

$= f(g(\vec{e_j}))$

$C_j = A B_j$ avec B_j = jième colonne de B

Notation finale de l'opération $C = AB$

Propriété clé $\mathrm{Mat}(f\circ g) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g)$

Présentation des calculs

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1p} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_{q1} & b_{qj} & b_{qp} \end{pmatrix} \quad B_j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \rightarrow & a_{1q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{a_{i1} \rightarrow a_{iq}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_{n1} & \rightarrow & a_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \otimes & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = AB = C$$

formule générale $C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$

exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad AB = ?$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & \underset{3\times 1+4\times 2}{\underbrace{11}} \end{pmatrix} \leftarrow AB$$

Condition pour faire le produit $A \times B$

nbre de colonnes de A = nb de lignes de B

même contrainte que pour composer

$f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

Mat(f) a q colonnes Mat(g) a q lignes

$$\underbrace{(1\ 2\ 3)}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 4+2\times5+3\times6 = \ell(\vec{N})$$

$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \vec{N}$

$$\ell(x,y,z) = x+2y+3z \in \mathbb{R}$$

Propriétés du produit de matrices et de la composition

associatif $\quad (f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h) \quad f(g(h(x)))$

$\Updownarrow$

$$(AB)C = A(BC)$$

distributif / addition $\quad (f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$

$\Updownarrow$

$$(A+B)C = AC+BC$$

produit pas commutatif

$$A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

calculer AB et BA et A^2

$$B = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = AB$$

$AB = 0$ alors que ni A ni $B = 0$!

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = A$$

$$B = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = A$$

$BA = A$ alors que $B \neq I_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$AB \neq BA$!] pas commutatif

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = A$$

$$A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = A^2$$

$A^2 = 0$ alors que $A \neq 0$!

pas intègre

$Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ app. identité

$\vec{v} \mapsto \vec{v}$

⇝ matrice identité de taille n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

élément neutre pour la multiplication

$I_n A = A = A I_n$ si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

correspond à $f \circ Id = Id \circ f$

Terminologie (livres + feuilles de TD + livres)

un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est une app. linéaire

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad End(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

associé à une matrice carrée de taille $n \times n$

notée $M_n(\mathbb{R})$ (au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{R})$)

Exercice

calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2, A^3, A^4, A^5, A^6, A^7, A^8, \ldots, A^{81}, A^{2021}$

- A^2

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ opposé de I_2

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

· $A^3 = A\times A\times A = (A^2)A = -I_2\times A = -A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

· $A^4 = (A^2)(A^2) = -I_2\times -I_2 = I_2^2 = I_2$

· $A^5 = (A^4)A = I_2\times A = A$!

· $A^6 = A^2 \qquad A^7 = A^3 \qquad A^8 = A^4 = I_2$

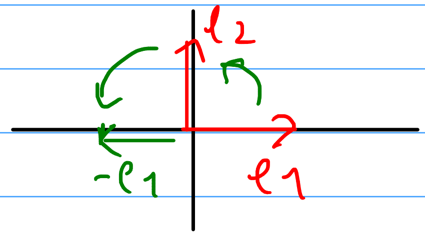
$$A^{n+4} = A^n\times A^4 = A^n\times I_2 = A^n$$

suite périodique de période 4

· $A^{81} = A^{80}\times A = (A^4)^{20}\times A = A$

· $A^{2021} = (A^4)^{505}\times A = A$

Explication du phénomène ?



$$\begin{array}{cc} Ae_1 & Ae_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$Ae_1 = e_2 \qquad Ae_2 = -e_1$

$A = \mathrm{Mat}(\underbrace{\text{Rotation d'angle}}_{R_{\frac{\pi}{2}}} \frac{\pi}{2})$

$A^2 = \mathrm{Mat}(R_{\frac{\pi}{2}}\circ R_{\frac{\pi}{2}})$
$= \mathrm{Mat}(R_\pi) = -I_2 \qquad N \rightsquigarrow -N$

$A^4 = \mathrm{Mat}(R_{\frac{\pi}{2}}^4) = \mathrm{Mat}(\underbrace{R_{2\pi}}_{= Id}) = I_2$

Exercice On a vu que $\mathrm{Mat}(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

que vaut $\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$?

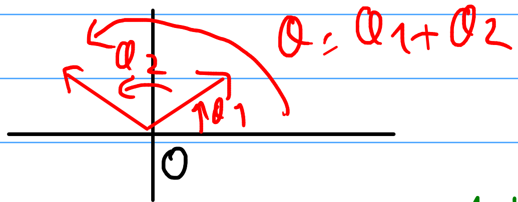
$= \mathrm{Mat}(R_{\theta_1}) \times \mathrm{Mat}(R_{\theta_2})$

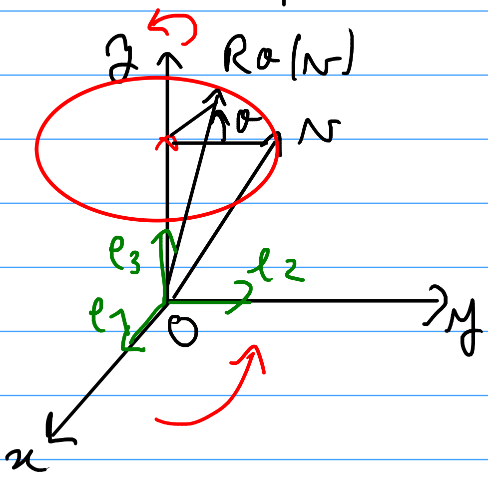
$= \mathrm{Mat}(R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2}) = \mathrm{Mat}(R_{\theta_1+\theta_2})$

$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$

⇝ formules de trigonométrie

$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$





Matrice d'une rotation R_θ de l'espace d'axe (Oz) d'angle θ

$R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Mat}(R_\theta) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\uparrow R_\theta(e_1)$ $\uparrow R_\theta(e_2)$ $\uparrow R_\theta(e_3) \overset{||}{\;} e_3$ $e_3 = (0,0,1)$