III Matrices et applications linéaires

1. Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

$$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{v} \mapsto f(\vec{v})$$

déf : $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est dite linéaire si pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^p$ on a

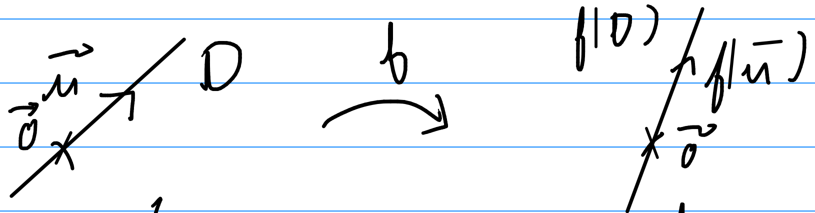
$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

et $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\iff f(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v})$$

Remarque . On a toujours $f(\vec{0}) = \vec{0}$

.

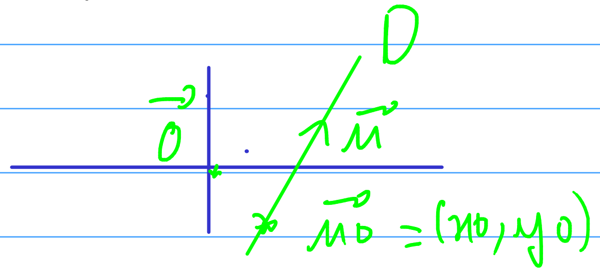


l'image d'une droite vectorielle D engendrée par $\vec{u} \neq \vec{0}$ par f linéaire est

- soit la droite $f(D) = D'$ engendrée par $f(\vec{u})$ si $f(\vec{u}) \neq \vec{0}$
- soit $f(D) = \{\vec{0}\}$ si $f(\vec{u}) = \vec{0}$

dém $\quad \vec{v} \in D \iff \vec{v} = \lambda \vec{u} \Rightarrow f(\vec{v}) = \lambda f(\vec{u})$

si D est une droite affine
passant par $\vec{u_0}$ de direction $\vec{u}$
$\rightsquigarrow f(D)$ droite affine passant par $f(\vec{u_0})$
et de direction $f(\vec{u})$ si $f(\vec{u}) \neq \vec{0}$
ou $f(D) = \{f(\vec{u_0})\}$ sinon



dem $\vec{v} \in D$ s'écrit $\vec{v} = \vec{u_0} + \lambda \vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

si f est linéaire on a $f(\vec{v}) = f(\vec{u_0}) + f(\lambda \vec{u})$

$$= \underbrace{f(\vec{u_0}) + \lambda f(\vec{u})}$$

décrit la droite affine passant par $f(\vec{u_0})$ de direction $f(\vec{u})$ si $f(\vec{u}) \neq \vec{0}$

Thm Soient $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p}$ p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (qq)

Alors il existe une unique app. linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et telle que

$f(\vec{e_1}) = \vec{v_1}$, $f(\vec{e_2}) = \vec{v_2}$, ..., $f(\vec{e_p}) = \vec{v_p}$

avec $\vec{e_1} = (1, 0, 0 \dots 0)$ $\vec{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0)$

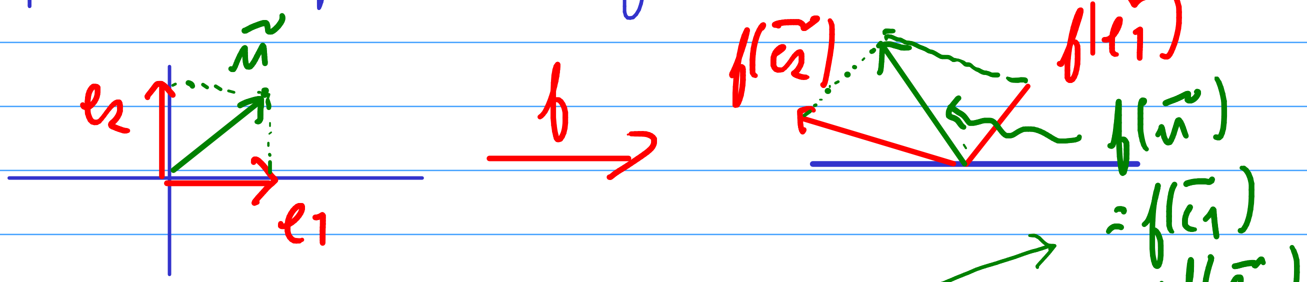
$\vec{e_p} = (0, 0, \dots, 1)$ $\in \mathbb{R}^p$

De plus si $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$

alors $f(\vec{u}) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p$

<u>Remarque</u> $f(\vec{u})$ est une combinaison linéaire de vecteurs donnés fabriquée avec les composantes x_i de $\vec{u}$

<u>exemple</u> $n = p = 2$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$= f(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2})$

$\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$

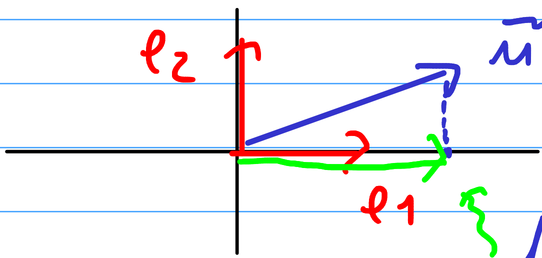
si $\vec{u} = (3, 2)$ $\quad f(\vec{u}) = 3 f(\vec{e_1}) + 2 f(\vec{e_2})$

$= 3 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2$

si $\vec{u} = (x, y) = x \vec{e_1} + y \vec{e_2} \rightsquigarrow f(\vec{u}) = x f(\vec{e_1}) + y f(\vec{e_2})$

<u>Exemples</u> Décrire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire

telle que $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ et $f(\vec{e_2}) = \vec{0}$



$\vec{u} = (x, y) = x \vec{e_1} + y \vec{e_2}$

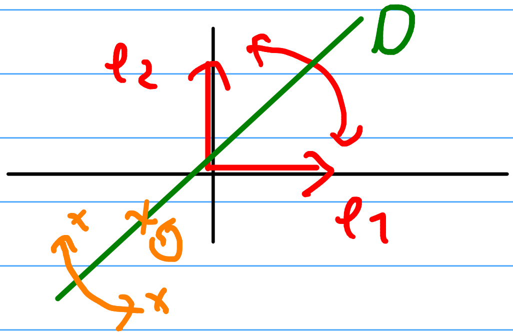
$\Downarrow$

$f(\vec{u}) = x f(\vec{e_1}) + y f(\vec{e_2})$

$f(x, y) = x \vec{e_1} = (x, 0)$

$\rightsquigarrow$ f est la projection orthogonale sur l'axe des x.

Décrire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que
$f(\vec{e_1}) = \vec{e_2}$ et $f(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$



$$f(x,y) = f(x\vec{e_1} + y\vec{e_2})$$
$$= x\, f(\vec{e_1}) + y\, f(\vec{e_2})$$
$$= x\vec{e_2} + y\vec{e_1}$$
$$f(x,y) = (y,x)$$

f symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $x = y$

2. Matrice d'une app. linéaire

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ app. linéaire déterminée par la donnée de $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})$

$\to$ tableau de coordonnées

def La matrice de f est le tableau de nombres A à n lignes et p colonnes

$$A = \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$
$$\text{“}\mathrm{Mat}(f)\text{”} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{ij} = nombre à la $i$ième ligne et la $j$ième colonne

$\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \to f(\vec{u}) = x_1 f(\vec{e_1}) + x_2 f(\vec{e_2}) + \dots + x_p f(\vec{e_p})$

exemples Matrice de la projection sur l'axe des x ?

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}}$ et $\underline{f(\vec{e_2}) = \vec{0}}$

$$A = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de la symétrie orthogonale / D $y = x$

$$B = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e_1}) = \vec{e_2} = (0,1) \qquad f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} = (1,0)$$

3. Calcul matriciel de l'image d'un vecteur

$$\underset{\mathbb{R}^p}{\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_p)} \rightsquigarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)} = f(\vec{u})$$

on passe en colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \rightsquigarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ip} x_p$$

C'est juste le calcul de $x_1 \times C_1 + x_2 \times C_2 + \dots + x_p \times C_p$

C_1 : 1ère colonne de A $\quad$ C_p : $p$ième colonne de A

$$= x_1 f(\vec{e_1}) + x_2 f(e_2) + \dots + x_p f(e_p)$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A\overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}^{e_1} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1+2\times0\\3\times1+4\times0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$ 1re colonne de A!

$$A\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{e_2} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times0+2\times1\\3\times0+4\times1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$ 2e colonne de A!

$$A\vec{u_3} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1-2\times1\\3\times1-4\times1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\vec{u_4} = \begin{pmatrix}\boxed{1\ 2}\\\boxed{3\ 4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times2+2\times3\\3\times2+4\times3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\18\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

Question 1 : B est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $p=?$ et $n=?$

$\underbrace{p=3}_{\text{largeur de B}}$ et $\underbrace{n=2}_{\text{hauteur de B}}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ?$$ n'existe pas !

$$\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$ n'existe pas $$\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Hauteur du vecteur appliqué = largeur de la matrice derrière la matrice
= p de $\mathbb{R}^p$ de l'espace de départ

$B = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ correspond à $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}\text{hauteur}\\3\end{pmatrix} X \mapsto Y = AX \begin{pmatrix}\text{hauteur}\\2\end{pmatrix}$

$\vec{u} = (1,-1,1)$ calculer $B\vec{u}$?

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix}1\times1-2\times1+3\times1\\4\times1-5\times1+6\times1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^2}$$

4. Exemples (géométriques) d'app. linéaire du plan

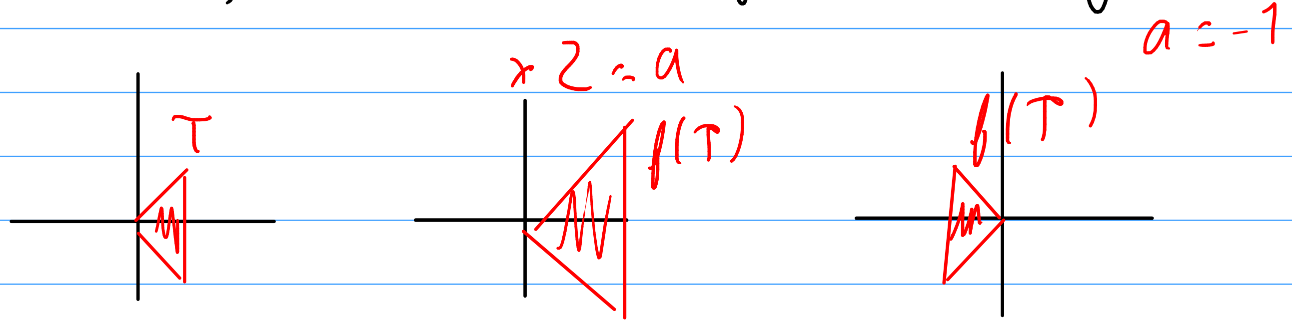
À $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ app. linéaire générale est associée une matrice 2×2

$A = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ a, b, c, d paramètres réels

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto Y = AX = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix}$$

Les + simples : les homothéties

$A = \begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$ $a\in\mathbb{R}$ $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to aX = \begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$



= zoom de rapport a

$a = 1$ $\quad \boxed{I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

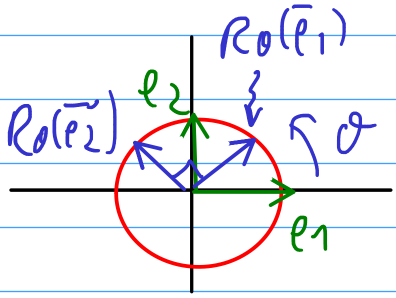
$I_2 \vec{v} = \vec{v}$ pour tout $\vec{v}$

s'appelle l'app linéaire identité

$a = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ matrice 2×2 nulle

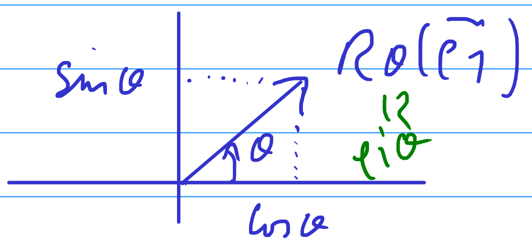
$$f : \vec{v} \mapsto f(\vec{v}) = \vec{0}$$

Les rotations dans $\mathbb{R}^2$ d'angle θ : R_θ



$R_\theta(\vec{e_1})$? $= (\cos\theta, \sin\theta)$

$R_\theta(\vec{e_2}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$



$$\boxed{\mathrm{Mat}(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

Exemple $\quad \mathrm{Mat}(R_{\frac{\pi}{2}}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Mat}(R_{\frac{\pi}{4}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

autre méthode on utilise les nombres complexes

$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \leftrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$

$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow e^{i\theta} \times z = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$

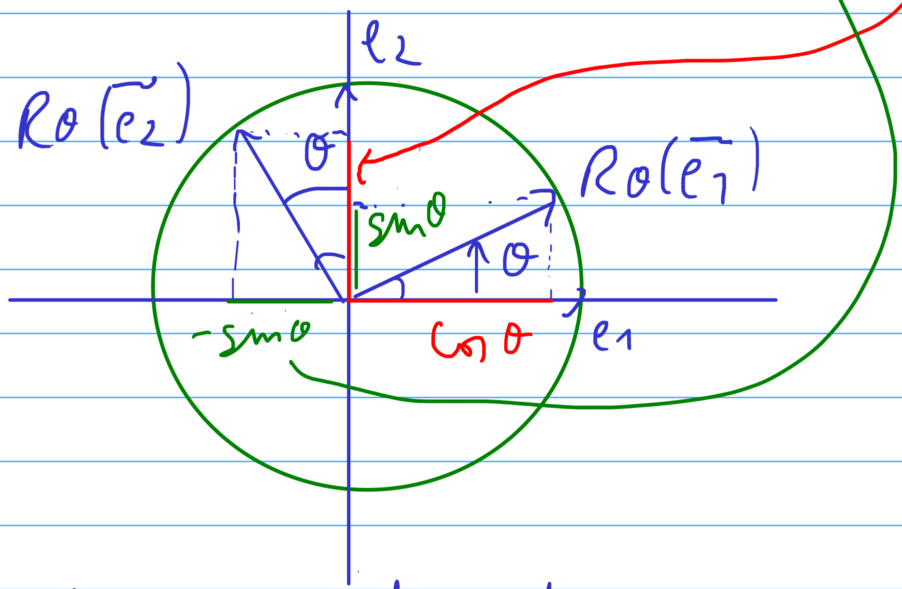
$= (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y) + i(\sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}(R_\theta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \nearrow$$

$$\mathrm{Mat}(R_\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta \vec{e_2} \rightsquigarrow (\cos\theta + i\sin\theta) \times i = -\sin\theta + i\cos\theta$$

$$= (-\sin\theta, \cos\theta)$$



les similitudes directes du plan

définition $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$. La similitude de rapport λ est l'application linéaire

$$f_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \lambda \cdot z$$

Rappel on a $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$$z = x + iy \leftrightarrow \vec{r} = (x, y)$$

Si $z = x + iy$ et $\lambda = a + ib$ $f_\lambda(z) = \lambda z = (a + ib)(x + iy)$

$= (ax-by) + i(bx+ay) \in \mathbb{C}$

$\simeq (ax-by,\ bx+ay) \in \mathbb{R}^2$

$$\rightsquigarrow \boxed{Mat(f_\lambda) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}$$

exemples $\lambda = a \rightarrow$ homothéties

$\lambda = \cos\theta + i\sin\theta \rightarrow$ rotations

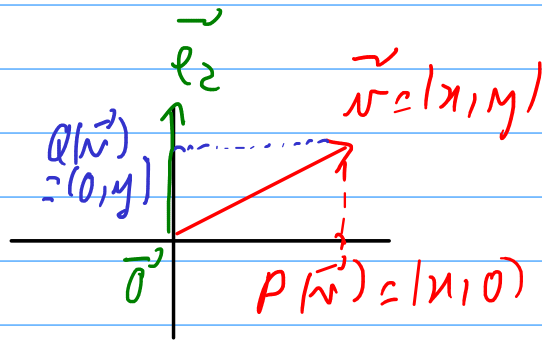
en général $\lambda = |\lambda| \times (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$f_\lambda(z) = \underbrace{|\lambda|}_{\text{homothétie}} \times \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)z}_{\text{rotation}}$$

Autres exemples

• projection P sur l'axe des x

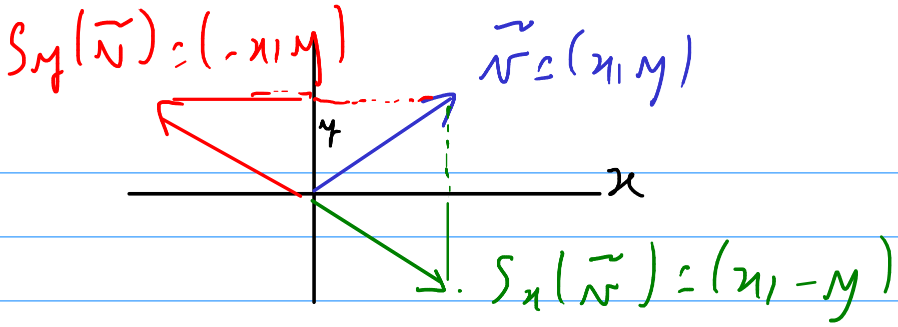
Q $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y$



$$\text{Matrice de } P = \begin{array}{cc} P(\vec{e_1}) & P(\vec{e_2}) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\text{Matrice de } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• symétries orthogonales suivant les axes des x ou des y



$$\mathrm{Mat}(S_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}(S_y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$