Cours d'algèbre linéaire
S2 PCST renforcé
Michel RUMIN

I L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1. n entier ≥ 1

déf $\mathbb{R}^n = \{ \vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ avec x_i réels $\}$
$\vec{v}$ = un vecteur
x_i composantes de $\vec{v}$

Exemples

$n = 1$ $\quad \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ droite réelle
$n = 2$ $\quad \mathbb{R}^2$ le plan $\vec{v} = (x, y)$
$n = 3$ $\quad \mathbb{R}^3$ "l'espace" $\vec{v} = (x, y, z)$
$n = 4$ $\quad \mathbb{R}^4$ espace temps $\vec{v} = (x, y, z, t)$

2 opérations possibles

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$
  si $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  et $\vec{v} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$

- $\lambda . \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$
  réel × vecteur

Compatibles $2(\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

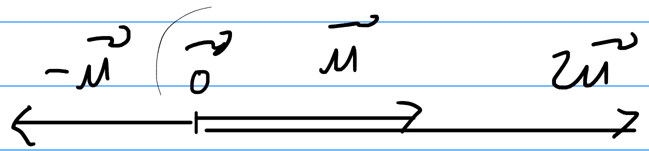
attention on ne peut pas faire ces opérations pour des vecteurs qui n'appartiennent pas au même espace

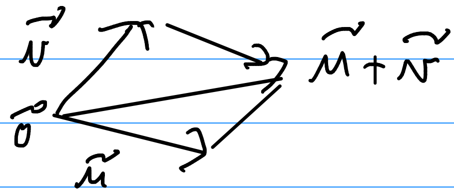
$(1,0) + (1,0,0)$ n'existe pas

"le" vecteur nul $\vec{0} = \underbrace{(0,0,\dots,0)}_{n \text{ zéros}} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{0} \neq$ nombre 0

les nombres λ s'appellent des scalaires





2. les combinaisons linéaires

exemple $\vec{v}_1 = (1,2,3)$ $\vec{v}_2 = (4,5,6)$

$\vec{v}_3 = (7,8,9)$

$$\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (1-2\times4+7,\ 2-2\times5+8,\ 3-2\times6+9)$$
$$= (0,0,0)$$
$$= \vec{0}$$

en général une c.l de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$

combinaison linéaire

est un vecteur de la forme

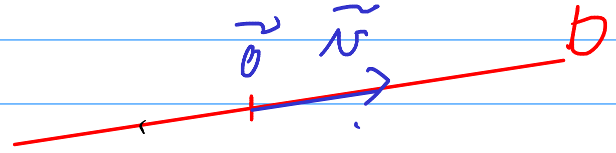
$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$$

3. droites et plans vectoriels

- soit $\vec{v}$ un vecteur non nul donné de $\mathbb{R}^n$

la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$

$$D = \{ \lambda \vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R} \}$$



exemple dans $\mathbb{R}^2$ $\quad y + 2x = 0$ décrire la droite D engendrée par

$y = -2x \quad x$ qq

$\iff \vec{v} = (x, y) = (x, -2x) = x(1, -2)$

$\in D$ ssi $\vec{v} = x(1,-2) = x\vec{u}$ avec $\vec{u} = (1,-2)$

autre exemple vecteur directeur de la droite d'équation

$2y - 3x = 0 \iff y = \frac{3}{2}x$

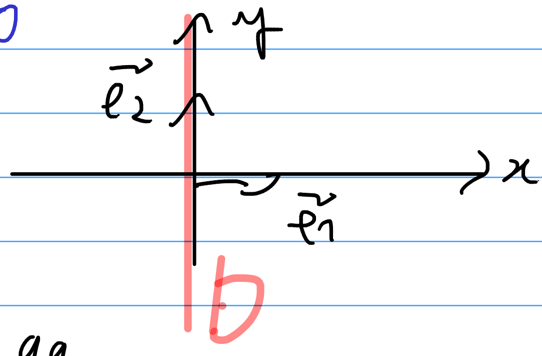
$\vec{v} = (x, \frac{3}{2}x) = x(1, \frac{3}{2}) \qquad \vec{u} = (1, \frac{3}{2})$

ou $\vec{u}' = (2, 3)$

droite d'équation $x = 0$

vecteur directeur?

= axe des y



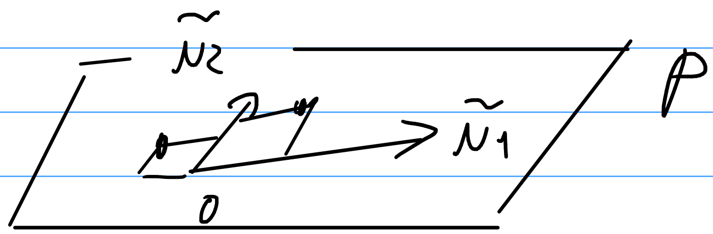
$\vec{v} \in D \iff \vec{v} = (0, y) \quad y$ qq

$= y(0,1) \to \vec{e}_2 = (0,1)$ vecteur directeur

• soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ 2 vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ (aucun multiple de l'autre)

le plan P engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$
défini par $P = \{ \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 ,\ \lambda_1, \lambda_2$ quelconques$\}$

ensemble des c.l de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$



exemple dans $\mathbb{R}^3$ Montrer que l'équation
$\boxed{x} + 2y + 3z = 0$ définit un plan vectoriel
et en donner des vecteurs directeurs

$\vec{v} = (x, y, z)$ est de la forme $\vec{v} = (\overbrace{-2y - 3z}^{=x}, y, z)$
y et z qq

$$\vec{v} = (-2y, y, 0) + (-3z, 0, z)$$
$$= y\underbrace{(-2, 1, 0)}_{\vec{v}_1} + z\underbrace{(-3, 0, 1)}_{\vec{v}_2} \quad y, z \text{ quelconques}$$

P est le plan engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

On écrit $\underbrace{P = Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}_{\text{espace vectoriel engendré par } \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2}$ notation

Donner des vecteurs directeurs du plan $y+2z=0$ dans $\mathbb{R}^3$

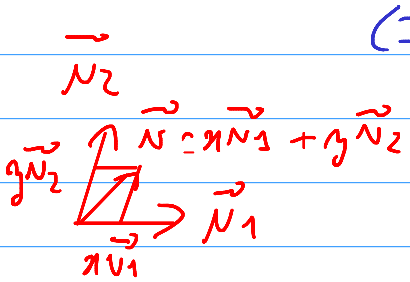
$\vec{v}=(x,y,z) \in P \iff y=-2z$ z quelconque et x quelconque

$\iff \vec{v}=(x,-2z,z)$

$=(x,0,0)+(0,-2z,z)$

$= x\underbrace{(1,0,0)}_{\vec{v}_1} + z\underbrace{(0,-2,1)}_{\vec{v}_2}$

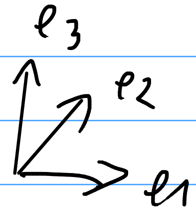
x et z quelconques (paramètres)



4. La base canonique de $\mathbb{R}^n$

dans $\mathbb{R}^n$ il y a n axes de coordonnées engendrés par les vecteurs

$$\begin{cases} \vec{e}_1=(1,0,0,\dots,0) \\ \vec{e}_2=(0,1,0,\dots\dots,0) \\ \vec{e}_n=(0,0,\dots,0,1) \end{cases}$$



Tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ est une c.l unique de ces vecteurs

$$\vec{v}=(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1,0,0,\dots,0)+(0,x_2,0,\dots,0)+\dots+(0,0,\dots,x_n)$$

$$\boxed{\vec{v}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n}$$

def $\mathcal{B}_{can} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ s'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^n$

II Résolution des systèmes linéaires

1. Présentation du problème

On veut trouver les solutions de système d'équations linéaires comme par exemple

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 4x_2 = a \end{cases}$$ paramètre

inconnues : les x_i

Codage général d'un système (S) à n équations et p inconnues

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = y_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = y_2 & L_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = y_i & L_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = y_n & L_n \end{cases}$$

Les nombres a_{ij} s'appellent les coefficients du système (connus)

$y_1, y_2, \dots, y_n$ second membre de (S) : connus aussi

$x_1, \dots, x_p$ inconnues

Convention de codage a_{ij} ← indice de la colonne

indice de la ligne

2. lien avec les combinaisons linéaires

(S) ⟺ on cherche $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{y}$$

avec $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{n2} \end{pmatrix}$ $\vec{v}_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ | \\ a_{np} \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}$

Les vecteurs se trouvent en colonnes dans les coefficients du système (S) associé

Exemple dans $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$

$\vec{v}_2 = (1, 2, 3)$

$\Rightarrow P = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ plan engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

$\vec{v}_3 = (4, 5, 6) \in P$?

⟺ $\exists x_1$ et x_2 tels que $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{v}_3$?

$$\iff (S) \begin{cases} x_1 \times 1 + x_2 \times 1 = 4 \\ x_1 \times 1 + x_2 \times 2 = 5 \\ x_1 \times 1 + x_2 \times 3 = 6 \end{cases}$$

$\vec{v_1}$ $\vec{v_2}$ $\vec{v_3}$

3. Codage matriciel d'un système

On met les coeff du système dans un tableau de nombre = une matrice

$$(S) \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$ matrice des coefficients

+ second membre $\vec{y}$

on code le tout avec une matrice dite "augmentée"

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & y_2 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & y_n \end{array}\right)$$

Exemples matrice du système précédent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

A quel système correspond $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$?

$$(S)\begin{cases} 0\times x_1 + 1\times x_2 = 2 \\ 1\times x_1 + 1\times x_2 = 3 \end{cases}$$

4. Systèmes triangulaires

exemple
$$\begin{cases} x + y + z = 1 & L_1 \\ \quad 2y - z = 2 & L_2 \\ \quad\quad 2z = 4 & L_3 \end{cases}$$

correspond à $n = p$ nbre d'inconnues = nb d'équations
coefficients nuls sous la diagonale

Propriété Un syst triangulaire a une unique solution si les coeff de la diagonale sont non nuls

Exemple $L_3 \Rightarrow z = 2$ $\quad L_2 \Leftrightarrow 2y = 2 + z = 4 \Rightarrow y = 2$

$L_1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z = -3$

5. Système échelonné

chaque ligne non nulle commence par de plus en plus de coefficients nuls

Exemples
$$\begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ \quad\quad \boxed{z} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 2 \\ \quad \boxed{2y} = 1 \\ \quad\quad \boxed{z} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ \quad 3y = 1 \\ \quad \boxed{0 = a} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{array}\right)$$ pas triangulaire

paramètre

condition de compatibilité

Les premiers coefficients non nuls de chaque ligne du système échelonné s'appellent les pivots de (S)

def Les inconnues des pivots s'appellent les inconnues principales
les autres sont secondaires

Propriété • Un système échelonné a des solutions ssi les équations de compatibilité sont satisfaites.
• Dans ce cas les solutions sont paramétrées par les valeurs des inconnues non principales qui passent dans le second membre

Exemple $\vec{v}_1 = (1,1,1)$ $\quad \vec{v}_2 = (1,2,3)$

$\vec{v} = (x,y,z)$ vecteur donné qq

Pb A-t-on $\vec{v} \in P = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$?

$\exists a, b$ tels que $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \vec{v}$?
(a, b inconnue)

$$\Leftrightarrow (S) \begin{cases} a + b = x \\ a + 2b = y \\ a + 3b = z \end{cases}$$

(S) a-t-il des solutions ?

On va échelonner le système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x & L_1 \\ b = y - x & L_2 \to L_2 - L_1 = L_2' \\ 2b = z - x & L_3 \to L_3 - L_1 = L_3' \end{cases}$$

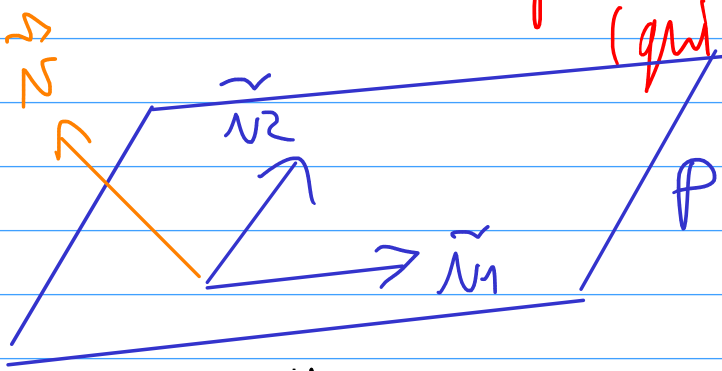
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x & L_1 \\ b = y - x & L_2' \\ \boxed{0 = z - x - 2(y - x) = x - 2y + z} & L_3' - 2L_2' \end{cases}$$

↑ équation de compatibilité de (S)

ok par exemple pour $\vec{v} = (4, 5, 6)$ $\underline{\in P}$ ok
($x = 4$, $y = 5$, $z = 6$)

non pour $\vec{v} = (1, 0, 0)$ $\quad \vec{v} \notin P$

Si $\vec{v} \in P$ il y a une unique solution a, b.
(qui dépend de $\vec{v}$!)



$P = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

Enfin $x - 2y + z = 0$ est l'équation cartésienne du plan

6. Transformations élémentaires et méthode du pivot de Gauss

transformations élémentaires.

On peut

- ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne
- intervertir 2 lignes
- multiplier une ligne par un coefficient non nul

Thm On peut transformer tout système en un système échelonné équivalent en utilisant les transformations élémentaires

C'est l'algorithme du pivot de Gauss

Exemple

(S_2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & L_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 & L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & L_1 \\ \quad -x_2 - 3x_3 = 0 & L_2 - 2L_1 \end{cases}$

2 inconnues principales x_1 et x_2

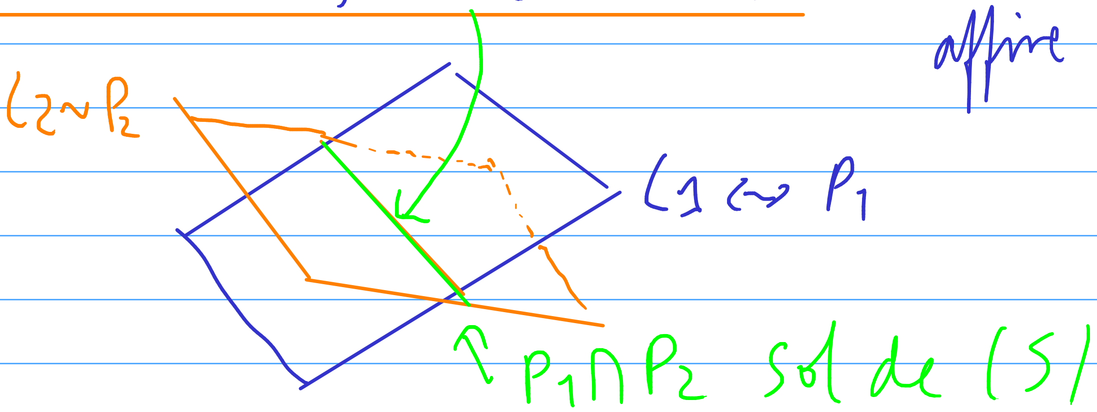
x_3 inconnue non principale $\to$ paramètre (valeur qq)

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 - x_3 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 \text{ qq} \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_3 - 2x_2 = 1 + 5x_3$$

Conclusion (S_2) a une infinité de solutions paramétrée par x_3

$x_1 = 1 + 5x_3$, $x_2 = -3x_3$ x_3 qq

$\vec{v} = (1,0,0) + x_3(5,-3,1)$ décrit une droite affine



7. Notion de rang

def Le rang d'un système est le nombre d'inconnues principales d'un système échelonné équivalent.

Remarques • Cela ne dépend que du 1er membre du système

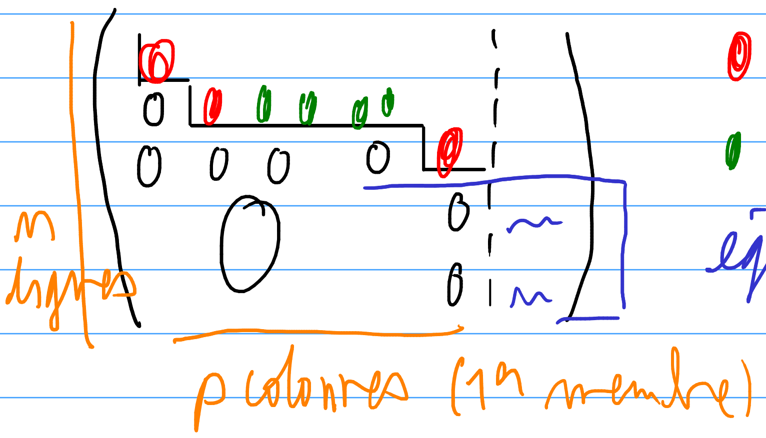
• indépendant de la façon d'échelonner (à voir plus tard)

Théorème Soit (S) un système à n équations p inconnues et de rang r

On a toujours $r \leq p$ et $r \leq n$

	$r = p$	$r < p$
$r = n$	solution unique	infinité de solutions
$r < n$	au plus une solution	pas de solution ou une infinité

Le cas $r = n = p$ s'appelle un système de Cramer



inconnues principales

inconnues secondaires

équations de compatibilité

On a toujours :

p = inconnues principales + inconnues secondaires

inconnues principales $= r$

n = inconnues principales + nbre d'équations de compatibilité