Feuilles d'exercices pour les groupes de maths renforcées du S2 PCST

2025-2026

Feuille de TD 1

COMBINAISONS LINÉAIRES, SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1 -

1. Dans $\mathbb{R}^2$, pouvez-vous exprimer le vecteur $(2,3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $(3,0)$ et $(1,-1)$? Et un vecteur (x,y) quelconque ?

2. Soient $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,2)$ et $v_3 = (3,-1,1)$. Vérifier que v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Exercice 2 - Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble E des solutions de l'équation $x + 2y + 3z = 0$.

1. Donner deux vecteurs non colinéaires v_1 et v_2 de E.

2. Montrer que E est le plan vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Exercice 3 - *Méthode du pivot.*

Échelonner les systèmes suivants. Donner leur rang, leurs inconnues principales et secondaires. Préciser le type de solutions (ensemble vide, solution unique, solutions dépendant de k paramètres) et les résoudre.

$$(S_1)\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 5x - 4y + 8z = -4 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x - 3y + z - t = 0 \\ -x + 2y - z - 2t = 1 \\ -3x + 7y - 3z - 3t = 2 \\ -x - z - 8t = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 - Peut-on trouver un réel t tel que le vecteur $v = (1, 3t, t)$ soit combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1,3,2)$ et $v_2 = (-1,1,-1)$? Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 5 - *Équation cartésienne d'un plan.*

Soient $v_1 = (1,1,1)$ et $v_2 = (1,2,3)$.

1. Pour $v = (x,y,z)$ donné quelconque, traduire l'équation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v$ en un système linéaire (S) aux inconnues λ_1 et λ_2.

2. Échelonner ce système et en déduire une équation cartésienne du plan P engendré par v_1 et v_2.

Exercice 6 - *Droite définie par équations cartésiennes.*

Montrer que la partie $D = \{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 0 = x + y + z\}$ est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur.

Exercice 7 - *Conditions de compatibilité et systèmes d'équations cartésiennes d'un plan de $\mathbb{R}^4$.*

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le plan $P = \mathrm{Vect}(v,w)$ engendré par les vecteurs

$$v = (1,2,-3,1) \quad \text{et} \quad w = (1,-1,1,-3)\,.$$

1. Montrer qu'un vecteur $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ est dans P ssi un certain système linéaire (S_u) est compatible.

2. Échelonner ce système et montrer qu'il est compatible ssi $u = (x, y, z, t)$ est solution d'un certain système linéaire homogène (S).

3. En déduire un système d'équations cartésiennes de P.

Exercice 8 - Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble P des vecteurs $v = (x, y, z, t)$ satisfaisant

$$(S)\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases}.$$

Résoudre (S) et en déduire que P est un plan de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera deux vecteurs générateurs.

Exercice 9 - *Quiz.*

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?

a) Si un système a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.
b) Si un système n'a aucune solution, alors il a plus d'équations que d'inconnues.
c) Si un système a une solution unique, alors il a autant d'équations que d'inconnues.
d) Si le rang d'un système est égal au nombre d'équations, alors il possède au moins une solution.
e) Si le rang d'un système est égal au nombre d'inconnues, alors il possède au plus une solution.

S2 PSCT — Orsay 2025-2026

Algèbre linéaire renforcée

Feuille de TD 2

Applications linéaires et matrices

Exercice 1 - Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Quand c'est le cas, écrire leur matrice.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, y)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y + 1$
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x - z, 2x - y + z)$
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x, 2x, 3x)$.

Exercice 2 - *Application linéaire associée à une matrice.*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$ associée (X écrit en colonne). Soit $B_{can} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Où se trouvent les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ dans A ?

2. Calculer $f(x, y, z)$ de deux manières « différentes » :

- en utilisant que $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et la linéarité de f ;

- ou par calcul direct de AX avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exercice 3 - *Exemples d'applications linéaires du plan.*

Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $v = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler l'expression de $f(v)$ où f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice A.

On considère dans $\mathbb{R}^2$ la lettre L constituée des deux segments de droite $(0, 0)$ à $(1, 0)$ et $(0, 0)$ à $(0, 2)$, et le triangle T passant par les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$.

2. Déterminer l'image de la lettre L, puis du triangle T, par les applications linéaires associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Quelles matrices sont associées à des similitudes directes, c'est-à-dire à des applications du type $f_\lambda : z = x + iy \mapsto \lambda z$ dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ avec $\lambda = a + ib = re^{i\theta}$?

Exercice 4 - *Une application linéaire utile.*

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - \frac{z}{2}, y - \frac{z}{2}).$$

1. Pourquoi f est-elle une application linéaire ?

2. Donner la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

3. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'image par f des trois axes $(0x)$, $(0y)$ et $(0z)$ de $\mathbb{R}^3$, l'image des arêtes du cube $C = [0, 1]^3$ de $\mathbb{R}^3$, l'image d'une figure quelconque située dans un plan horizontal $z = c$.

4. Voyez-vous une utilité à cette application f ?

5. Déterminer les vecteurs $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(v) = \overrightarrow{0}$.

Exercice 5 - *Produit de matrices.*

1. Calculer, lorsque cela est possible, le produit AB, pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les carrés de toutes les matrices de la question 2 de l'exercice 3. Interpréter géométriquement les résultats lorsque c'est possible.

Exercice 6 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice carrée A on note

$$A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ fois}}.$$

Comme le produit de matrices est associatif, on a $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$, et on utilise la convention $A^0 =$ la matrice identité lorsque A est inversible (cf feuille suivante).

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^n pour $n = 2, \ldots, 7$ puis pour $n = 2019$.

2. Soit $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer R^{2020}.

Indication. On peut réfléchir à la signification géométrique de R, qui porte bien son nom ;-)

S2 PCST — Orsay 2025-2026
Algèbre linéaire renforcée

Feuille de TD 3
Matrices inversibles

Exercice 1 - *Matrices inversibles.*

Décider si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. H est la matrice du produit vectoriel $\vec{v} \mapsto \vec{\omega} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{\omega} = (a, b, c)$.

Exercice 2 - *Produit de matrices inversibles.*

Soient A et B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice produit AB est aussi inversible et donner une formule pour son inverse.

Exercice 3 - *Un problème à méditer dans son bain !*

Un joaillier de Syracuse utilisait pour confectionner ses bijoux un alliage d'or et d'argent ; métaux de densités respectives 20 et 10 grammes par cm^3.

Le roi Hiéron II lui commanda une couronne de 5 kg, en exigeant que l'or en constitue au moins 90% de sa masse. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il eut une idée pour vérifier la composition de la couronne. En la plongeant dans l'eau, il constata que son volume était de 370 cm^3.

1. Que s'est alors écrié Archimède ?

2. Déterminer la matrice A qui, étant donné un bijou fabriqué par ce joaillier, applique le vecteur $X = \begin{pmatrix} \text{masse d'or} \\ \text{masse d'argent} \end{pmatrix}$ sur le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix}$.

3. En déduire un calcul de la composition de la couronne.

4. Le joaillier a-t-il intérêt à faire ses bagages rapidement ?

Exercice 4 - Soient $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On note $\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ leur produit scalaire et $\det(u, v) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$ leur déterminant.

1. Montrer par un calcul direct que $\det(u, v)^2 + \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.

2. Retrouver que $|\det(u, v)| = \|u\|\|v\||\sin\theta|$ est l'aire du parallélogramme déterminé par u et v, avec θ angle entre u et v.

Exercice 5 - Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. Pour λ paramètre réel, on considère la matrice $A_\lambda = A - \lambda I$.

1. Les matrices $A_0 = A$ et A_3 sont-elles inversibles ?

2. Calculer A^2 et l'exprimer à l'aide A.

3. Pour λ et μ réels quelconques, développer le produit $A_\lambda A_\mu$ et l'exprimer à l'aide de A et I.

4. En déduire que pour $\lambda \neq 0$ et 3, la matrice A_λ est inversible et que son inverse est de la forme kA_μ pour des réels k et μ bien choisis .

Feuille de TD 4

FAMILLES LIBRES, GÉNÉRATRICES, BASES, DIMENSION

Exercice 1 - *Famille libre ou liée ?*

Soient $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Vérifier que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour v_2 et v_3, ainsi que pour v_1 et v_3.

2. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire.

Exercice 2 - *Coordonnées dans une base.*

1. Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$ forment une base B de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer les coordonnées d'un vecteur $v = (x, y, z)$ dans B.

3. Inversement, quelles sont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du vecteur $v = (x', y', z')_B$?

Exercice 3 - *Extraction de base d'un système générateur.*

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1),\ v_3 = (1, 1, 3, 1),\ v_4 = (2, 0, 5, 1).$$

1. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle libre ? Quel est son rang ?

2. Soit $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Quelle est la dimension de E ? Extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.

Exercice 4 - *Dimension et base d'un sev défini par un système d'équations.*

1. Déterminer la dimension et donner une base du sev de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y + 3z - 4t = 0\}.$$

2. Même question avec

$$F = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z + 2t = 0 = -2x - 4y + z - t\}.$$

Exercice 5 - *Base incomplète.*

1. Soient $v_1 = (1, -2, 1)$ et $v_2 = (-1, 2, 1)$. Compléter la famille libre (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Même question avec $v_1 = (1, -2, 1)$ et $v_2 = (2, 2, -1)$.

Exercice 6 - Soient E et F deux sev non nuls de $\mathbb{R}^n$. On choisit une base $B_E = (e_1, \cdots, e_p)$ de E et $B_F = (f_1, \cdots, f_q)$ de F.

1. Montrer que la famille $B_E \sqcup B_F = (e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ reste libre si $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$.

Indication. Écrire une relation linéaire $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0$ sous la forme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = -\sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j$.

2. En déduire que si $\dim E + \dim F > n$ alors $E \cap F \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

3. Donner dans $\mathbb{R}^n$ des exemples de couples de sev E et F tels que $\dim E + \dim F = n$ avec $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$.

S2 PCST — Orsay 2025-2026
Algèbre linéaire renforcée

Feuille de TD 5

Noyau, image, théorème du rang

Exercice 1 - *Rang, noyau et image d'une application.*

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
et on note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto AX$ l'application linéaire associée.

1. Déterminer le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective ?

2. Que vaut $\dim \ker f$? f est-elle injective ? Déterminer une base de $\ker f$.

3. Soient x_0, y_0, z_0 donnés. Résoudre sans calcul supplémentaire l'équation $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 2 - *Construction d'exemples.*

1. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont l'image est engendrée par le vecteur $v_1 = (1, 2, 3)$.

2. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^p$ dont le noyau est la droite engendrée par $v_2 = (1, -1, 1)$. Quelle est la valeur minimale de p possible pour un tel exemple ?

3. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont le noyau **et** l'image est la droite engendrée par $v_3 = (1, 2)$. Que peut-on dire de $f^2 = f \circ f$ dans ce cas ?

Exercice 3 - Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

1. A peut-elle être injective ? surjective ?

2. B peut-elle être injective ? surjective ?

3. Quelles sont les tailles des matrices AB et BA ?

4. Montrer que $\operatorname{Im} AB \subset \operatorname{Im} A$ et $\ker B \subset \ker AB$.

5. La matrice AB peut-elle être inversible ? Qu'en est-il pour BA ?

Exercice 4 - *Matrices de rang 1.*

Soient $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de taille n et $L = (\ell_1, \cdots, \ell_p)$ une matrice ligne de taille p. On suppose que V et L sont non nuls. On considère la matrice produit $A = VL$.

1. Quelle est la taille de A ? Calculer A.

2. Déterminer le noyau et l'image de A. Quel est son rang ?

Exercice 5 - *Matrices de rang 1, la réciproque.*

Soit A une matrice $n \times p$ de rang 1. On suppose que l'image de A est la droite engendrée par un vecteur (colonne) V de $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe une matrice ligne L de taille p telle que $A = VL$.

Feuille de TD 6

Sommes directes, projections et symétries

Exercice 1 - *Supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer un supplémentaire D de $P = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

2. Combien il y a-t-il de choix possibles pour D ?

3. Donner la décomposition de $e_1 = (1, 0, 0)$ suivant (votre choix) de somme directe $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

Exercice 2 - *L'ombre du soleil.*

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_{can} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère le plan horizontal $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et la droite D_θ engendrée par $u_\theta = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$.

1. À quelle condition sur θ a-t-on $\mathbb{R}^3 = H \oplus D_\theta$?

On se place désormais dans ce cas et on considère la projection p_θ sur H dans la direction D_θ.

2. Que valent $p_\theta(e_1)$ et $p_\theta(e_2)$?

3. Exprimer e_3 à l'aide de e_1, e_2 et u_θ. En déduire $p_\theta(e_3)$ et la matrice de P_θ de p_θ dans B_{can}.

Exercice 3 - *Projections orthogonales sur droite et plan de* $\mathbb{R}^3$.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère un vecteur $u = (a, b, c)$ non nul et le plan P (orthogonal à u) d'équation $ax + by + cz = 0$. On note D la droite engendrée par u et p la projection sur D le long de P.

1. Soit $v = (x, y, z)$. Montrer que

$$p(v) = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}\, u.$$

Indication. On pourra vérifier que cette formule linéaire est correcte sur D et P.

2. En déduire la matrice de p dans la base canonique.

3. Donner la matrice de la projection orthogonale q sur P (le long de D), et celle de la symétrie orthogonale s par rapport à P.

Exercice 4 - *Une caractérisation des symétries.*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $f \circ f = \mathrm{Id}$. On note $E = \{v \in \mathbb{R}^n,\ f(v) = v\}$ et $F = \{v \in \mathbb{R}^n,\ f(v) = -v\}$.

1. Vérifier que E et F sont des sev de $\mathbb{R}^n$. Que vaut $E \cap F$?

2. Montrer que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$.

Indication. On remarquera que tout vecteur v s'écrit $v = \frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(v - f(v))$.

3. Montrer que f est la symétrie par rapport à E suivant F.

Exercice 5 - *Illustration de l'exercice précédent.*

Soit f l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire que f est une symétrie.

2. Trouver les axes de cette symétrie.

Feuille de TD 7

Applications linéaires et matrices dans les bases générales

Exercice 1 - *Différentes matrices d'une même application linéaire.*

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 2z).$$

1. Donner la matrice de f quand on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leur base canonique B_3 et B_2.

2. Montrer qu'il existe des vecteurs v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(v_1) = (0, 0)$, $f(v_2) = (1, 0)$ et $f(v_3) = (0, 1)$ (avec $v_1 \neq (0, 0, 0)$). Vérifier que $B_3' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{B_3', B_2}(f)$.

3. Vérifier que $B_2' = ((1, 1), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{B_3, B_2'}(f)$.

Exercice 2 - *Matrices d'un endomorphisme dans différentes bases.*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices de f dans les bases $B_1 = (e_2, e_1)$, $B_2 = (-e_1, 2e_2)$ et $B_3 = (e_1 - e_2, e_1)$.

Remarque. Un *endomorphisme* f d'un espace vectoriel E est juste une application linéaire de E dans E. Dans ce cas, on utilise en général une même base de E au départ et à l'arrivée pour décrire f. Si par exemple on utilise B alors on note le résultat $\mathrm{Mat}_B(f)$ plutôt que $\mathrm{Mat}_{B,B}(f)$ par concision. Ici, on veut donc calculer $A_1 = \mathrm{Mat}_{B_1}(f)$, $A_2 = \mathrm{Mat}_{B_2}(f)$ et $A_3 = \mathrm{Mat}_{B_3}(f)$. C'est facile dans cet exemple en revenant à la définition de ces matrices.

Exercice 3 - *Application linéaire déterminée par l'image d'une base.*

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les deux vecteurs $v_1 = (2, 1)$ et $v_2 = (1, 1)$.

1. Vérifiez que $B = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer les coordonnées de $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ dans la base B.

Soit p l'unique application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $p(v_1) = v_1$ et $p(v_2) = (0, 0)$.

2. Quelle est la matrice M de p dans la base B ? Que représente géométriquement p ?

3. Calculer $p(e_1)$ et $p(e_2)$ à l'aide de la question 1 et de la définition de p. Exprimer d'abord les résultats en fonction de v_1 et v_2, puis à l'aide de e_1 et e_2.

4. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $B_{can} = (e_1, e_2)$. Que vaut N^2 ? Interpréter !

Exercice 4 - *Matrice de passage et coordonnées.*

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $B' = (u_1 = (-1, 2, 3),\ u_2 = (1, -1, 1),\ u_3 = (-1, 1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage $P_B^{B'}$ de B à B'.

2. Soit $u = x'u_1 + y'u_2 + z'u_3 = (x', y', z')_{B'}$. Quel calcul matriciel permet de déterminer les composantes x, y, z de u dans la base canonique ?

3. Inversement, si $u = (x, y, z)$, exprimer les coordonnées de u dans la base B'.

4. On pose $P = \text{Vect}(u_1, u_2)$. À quelle condition sur x', y', z' le vecteur $u = (x', y', z')_{B'}$ appartient-il à P ? En déduire une équation cartésienne de P dans la base canonique. Faire de même avec les plans $Q = \text{Vect}(u_2, u_3)$ et $R = \text{Vect}(u_1, u_3)$.

5. On note $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Donner une équation cartésienne de E dans la base B'.

Exercice 5 - *Changement de base, suite.*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $A' = \text{Mat}_{B'}(f)$, où B' est la base de l'exercice précédent.

1. Quelle formule utilisant P, P^{-1} et A permet de calculer A' ?

2. Déterminer A', soit à l'aide de cette formule, soit en exprimant directement l'image de B' par f dans B'. Quelle est la signification géométrique de f ?

3. Calculer A'^2 et en déduire A^2.

S2 PCST — Orsay 2025-2026

Algèbre linéaire renforcée

Feuille de TD 8

Exercices de modélisation,
diagonalisation en dimension 2 et applications

Exercice 1 - *Un problème de pêche à la ligne.*

Chaque année, une société de pêche lâche 100 jeunes poissons dans un lac. D'une année à l'autre :

— 80% des jeunes poissons (J) meurent, et 20% deviennent adultes ;

— un poisson adulte (A) se reproduit en donnant naissance en moyenne à 2 jeunes poissons, puis 50% des poissons adultes meurent ou sont péchés.

1. L'année n, on note $X(n) = (J(n), A(n))$ la population de poissons. Montrer que, écrit en colonne, $X(n)$ satisfait une relation de recurrence du type $X(n+1) = MX(n) + E$ avec M une matrice fixe et E un vecteur fixe.

2. Montrer qu'il existe une population stationnaire et la calculer.

3. Combien peut-on pêcher de poissons (au maximum) chaque année dans ce cas ?

Exercice 2 - *Chaîne de Markov à deux états.*

On considère l'évolution d'un système à deux états : A et B. Soient p et q deux réels donnés dans $[0, 1]$. D'un instant t à l'instant $t + 1$, la probabilité de passer de A à B est p, et celle de passer de B à A est q.

1. Donner le graphe de la chaîne de Markov associée (en précisant les probabilités des transitions qui ne sont pas données dans l'énoncé). Montrer que la matrice de transition M associée est, dans la convention du cours,

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} .$$

2. Calculer $M - I_2$. En déduire que si p ou q est non nul, alors il existe un unique vecteur état mélangé stationnaire $E_1 = (x, y)$ et le calculer.

On rappelle que l'on veut $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y = 1$ pour interpréter E_1 comme une répartition probabiliste du système entre les deux états A et B.

3. Soit $E_2 = (1, -1)$. Calculer ME_2. En déduire que dans la base $B' = (E_1, E_2)$ la matrice de l'application associée à M est donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix} .$$

4. Calculer $(M')^n$. En déduire que si p et $q \in]0, 1[$, alors quelle que soit la condition initiale X_0, la suite de vecteurs $X(n) = M^n X_0$ converge vers un multiple de E_1.

Indication. Raisonner dans la base B'.

5. Quel résultat du cours a-t-on montré (dans un cas particulier) ? Que se passe-t-il pour $p = q = 1$?

Exercice 3 - *Matrices diagonalisables ou pas ?*

Pour chacune des matrices suivantes, calculer son polynôme caractéristique et ses valeurs propres. Dire si elle est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ et donner dans ce cas une base de diagonalisation :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 - *Diagonalisation et puissances de matrices.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

2. Montrer que A est diagonalisable et trouver une base $B = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ de diagonalisation.

3. Soit P la matrice de passage de B_{can} à B. Quelle relation existe-t-il entre A, sa diagonalisation $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ dans B et P ? Entre A^n, D^n et P ?

4. Calculer A^n.

Exercice 5 - *Déterminant et changement de base.*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, de matrices A et A' dans des bases B et B'.

1. Montrer, en considérant $P_A(\lambda)$, que $\det A = \lambda_1\lambda_2$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres (éventuellement complexes ou confondues) de f.

2. En déduire que $\det A = \det A'$. Que pensez-vous des polynômes caractéristiques de A et A' ?

Exercice 6 - *Étude de suites définies par une récurrence linéaire.*

On étudie les suites (u_n) définies par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$(R)\ :\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n\,.$$

1. On note $X(n) = (u_n, u_{n+1})$. Montrer que la suite $X(n)$ satisfait une relation de la forme $X(n+1) = AX(n)$ avec A matrice à déterminer.

2. Trouver les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. En déduire que les suites solutions de (R) sont de la forme

$$u_n = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels fixés.}$$

4. Calculer u_n lorsque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Montrer que u_n tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et que u_{n+1}/u_n a une limite et la déterminer.

Exercice 7 - *Étude d'un système proies-prédateurs.*

On revient sur le modèle de population de coyottes et les géocoucous (roadrunners) du cours. Si on note $X(t) = (c(t), r(t))$ les populations l'année t, on observe que

$$X(t+1) = AX(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix},$$

tant que $c(t)$ et $r(t)$ restent positifs.

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

Indication. On peut utiliser une calculatrice pour obtenir $\det A$. Les valeurs propres « tombent justes ».

2. Montrer que A est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres $B = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

3. En déduire (quitte à réordonner B) qu'il existe des réels a et b tels que

$$X(n) = a\,(0.9)^n \overrightarrow{u_1} + b\,(1.1)^n \overrightarrow{u_2},$$

tant que les composantes de $X(n)$ restent positives.

4. Essayer de dessiner quelques orbites en fonction des conditions initiales.

Indication. Représenter $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ dans le plan et discuter suivant les signes de a et b.

5. Montrer que si $c(0) \geq 2r(0)$ les deux espèces vont s'éteindre, et sinon elles vont prospérer. Montrer dans ce cas que le rapport $r(n)/c(n)$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 - *Étude de l'évolution du couple glucose-insuline.*

On reprend l'exemple présenté en cours de l'évolution des taux de glucose et de l'insuline dans le sang. On mesure heure après heure leur concentration $X(t) = (g(t), h(t))$, relativement à leur taux à jeun, après un repas. La modélisation retenue est que

$$X(t+1) = AX(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable (dans $M_2(\mathbb{R})$) ?

2. Calculer les valeurs propres complexes λ et $\overline{\lambda}$ de A. (Elles tombent justes.) Comparer $|\lambda|$ à 1.

3. En déduire, à l'aide du cours, l'allure des orbites (l'évolution) de $X(t)$.

Exercice 9 - On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

2. Déterminer les valeurs propres complexes de A. Quel est leur module ? leur argument ?

3. En déduire, à l'aide d'un théorème du cours, qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = R.$$

4. En déduire la valeur de A^6 ?

5. Que peut-on en conclure sur le comportement des suites récurrentes $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$?