Correction de la feuille de TD 4

Familles libres, génératrices, bases, dimension

Exercice 1 - *Famille libre ou liée ?*

Soient $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1. Vérifier que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour v_2 et v_3, ainsi que pour v_1 et v_3.

2. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire.

Réponses. 1. Immédiat.

2. On étudie le système $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \boxed{-3\lambda_2} - 3\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il y a des solutions, par exemple $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_1 = 2$, c'est-à-dire $2v_1 - v_2 + v_3 = 0$. La famille $\mathcal{F}$ n'est donc pas libre. Elle engendre un plan. (Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont coplanaires.)

Exercice 2 - *Coordonnées dans une base.*

1. Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (1,1,1)$ forment une base B de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer les coordonnées d'un vecteur $v = (x,y,z)$ dans B.

3. Inversement, quelles sont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du vecteur $v = (x', y', z')_B$?

Réponses.

1. $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi la matrice associée $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3, ce qui est le cas (déjà échelonnée).

2. Les coordonnées x', y', z' de $v = (x,y,z)$ dans B satisfont $x'v_1 + y'v_2 + z'v_3 = v \Leftrightarrow$

$$P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' + z' = x \\ y' + z' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y' - z' = x - y \\ y' = y - z' = y - z \\ z' = z \end{cases}$$

3. On vient de voir que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + y' + z' \\ y' + z' \\ z' \end{pmatrix}$. (Pas de matrice à inverser dans ce sens de calcul.)

Exercice 3 - *Extraction de base d'un système générateur.*

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1),\ v_3 = (1, 1, 3, 1),\ v_4 = (2, 0, 5, 1).$$

1. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle libre ? Quel est son rang ?

2. Soit $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Quelle est la dimension de E ? Extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.

Réponses.

1. Le rang de $\mathcal{F}$ est celui de la matrice associée $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On échelonne en lignes

$$\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Comme $\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = 2 < 4 = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$ la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre.

> En effet, on rappelle qu'une famille $\mathcal{F}$ est libre ssi c'est une base de ce qu'elle engendre, c'est-à-dire que $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))(= \mathrm{rg}\,\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

2. On a $\dim E = \mathrm{rg}\,\mathcal{F} = 2$. Le sev E est donc un plan. D'après un théorème du cours, une base de E est donnée par les vecteurs (v_1, v_2) qui correspondent aux indices des inconnues principales de A (les deux premières colonnes de A).

Exercice 4 - *Dimension et base d'un sev défini par un système d'équations.*

1. Déterminer la dimension et donner une base du sev de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y + 3z - 4t = 0\}.$$

2. Même question avec

$$F = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z + 2t = 0 = -2x - 4y + z - t\}.$$

Réponses.

1. On a

$$\begin{aligned} v = (x, y, z, t) \in E &\Leftrightarrow x = 2y - 3z + 4t \\ &\Leftrightarrow v = y(2, 1, 0, 1) + z(-3, 0, 1, 0) + t(4, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

E est donc engendré par les 3 vecteurs $v_1 = (2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-3, 0, 1, 0)$ et $v_3 = (4, 0, 0, 1)$. De plus ces vecteurs sont linéairement indépendants (à cause de leurs 3 dernières coordonnées qui décrivent la base canonique de $\mathbb{R}^3$). La famille $B = (v_1, v_2, v_3)$ est donc une base de E qui est un sev de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.

On a ici un cas particulier du théorème du cours qui donne la dimension et une base d'un sev $E = \mathrm{Sol}(S)$ défini comme solutions d'un système homogène (S).

On rappelle que dans ce cas, $\dim E$ est le nombre d'inconnues **non principales** de (S), 3 ici : y, z et t. Et que chaque inconnue principale donne lieu à une solution particulière dont la collection forme une base de E.

2. On échelonne et résout le système définissant F. On a $v = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ -2x - 4y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y + z + 2t = 0 \\ \boxed{3z} + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = -2y - t \\ \boxed{z} = -t \\ y \text{ et } t \text{ quelconques} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow v = (-2y - t, y, -t, t) \\ &\qquad = y(-2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, -1, 1). \end{aligned}$$

F est donc un plan (dimension 2) de base $B = (v_1 = (-2, 1, 0, 0), v_2 = (-1, 0, -1, 1))$.

Exercice 5 - *Base incomplète.*

1. Soient $v_1 = (1, -2, 1)$ et $v_2 = (-1, 2, 1)$. Compléter la famille libre (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Même question avec $v_1 = (1, -2, 1)$ et $v_2 = (2, 2, -1)$.

Réponses.

1.

Le théorème de la base incomplète affirme que l'on peut compléter une famille libre en une base de $\mathbb{R}^n$ en rajoutant à cette famille libre certains éléments d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ choisie d'avance, comme par exemple la base canonique.

Ici, on peut essayer de compléter par $B = (v_2, v_2, e_1)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$. On a

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} = 3.$$

C'est bien une base. Si cela ne marche pas avec e_1, on essaye avec e_2 etc.

2. Même méthode. On trouve que $\operatorname{rg}(v_1, v_2, e_1) = 2$ (ne marche pas), mais $\operatorname{rg}(v_1, v_2, e_2) = 3$, d'où $B = (v_1, v_2, e_2)$ base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 - Soient E et F deux sev non nuls de $\mathbb{R}^n$. On choisit une base $B_E = (e_1, \cdots, e_p)$ de E et $B_F = (f_1, \cdots, f_q)$ de F.

1. Montrer que la famille $B_E \sqcup B_F = (e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ reste libre si $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$.

2. En déduire que si $\dim E + \dim F > n$ alors $E \cap F \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

3. Donner dans $\mathbb{R}^n$ des exemples de couples de sev E et F tels que $\dim E + \dim F = n$ avec $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$.

Réponses.

1. Soient λ_1, $\cdots$, λ_p, μ_1, $\cdots$, μ_q tels que

$$\begin{aligned}\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q = \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = -(\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q) \in E \cap F\end{aligned}$$

On a donc $v = \overrightarrow{0}$ par hypothèse sur $E \cap F$, puis $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_q = 0$ car les familles B_E et B_F sont libres. La famille $B_E \sqcup B_F$ reste donc libre.

2. La famille $B_E \sqcup B_F$ de $\mathbb{R}^n$ à $\dim E + \dim F$ éléments. Elle ne peut donc être libre si

$$\dim E + \dim F > n.$$

On a donc nécessairement $E \cap F \neq \{\overrightarrow{0}\}$ dans ce cas d'après la question 1.

3. On peut prendre $E = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ et $F = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$.