Correction de la feuille de TD 3

Matrices inversibles

Exercice 1 - *Matrices inversibles.*

Décider si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. H est la matrice du produit vectoriel $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{\omega} = (a, b, c)$.

Réponses.

- A n'est pas inversible car pas de taille carrée.
- En échelonnant B, on voit qu'elle est de rang 1 donc pas inversible. On peut aussi dire que $\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - (-3)(-2) = 0 \Rightarrow B$ pas inversible.
- On a $\det C = a^2 + b^2$, donc C est inversible ssi $(a, b) \neq (0, 0)$, et on a alors

  $$C^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

  Remarque. C est la matrice de la similitude $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda = a + ib$. Si $\lambda \neq 0$, la réciproque est la similitude de rapport $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\overline{\lambda}}{|\lambda|^2} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$ comme on le voit ci-dessus.
- D est de rang 2 en l'échelonnant, donc pas inversible.
- E est de rang 3, donc inversible. On résout

$$E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = x' \\ y + 2z = y' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2y - 3z = x' - 2y' + z' \\ y = y' - 2z' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ avec } E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On a $FX = X' \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+2y+2z=x' \\ x+3y+2z=y' \\ x+z=z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+2y+2z=x' \\ y=y'-x' \\ -2y-z=z'-x' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+2y+2z=x' \\ \boxed{y}=y'-x' \\ -z=z'-x'+2(y'-x')=-3x'+2y'+z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}=x'-2y-2z=-3x'+2y'+2z' \\ \boxed{y}=y'-x' \\ \boxed{z}=3x'-2y'-z' \end{cases}$$

D'où F est inversible et $F^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. (Il vaut mieux vérifier que $F^{-1}F = I_3$ à la fin du calcul !)

- La matrice G diagonale est inversible ssi a, b et c sont non nuls, et on a directement

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}.$$

- Vous avez peut-être vu en physique que $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$. Cela s'écrit ici $H\omega = 0$ (à vérifier !). Du coup, soit $(a,b,c) = (0,0,0)$ et la matrice $H = 0$ n'est pas inversible, soit on a que H n'est pas injective puisque $H\omega = H0 = 0$ avec $\omega \neq 0$. H n'est donc jamais inversible.

Exercice 2 - *Produit de matrices inversibles.*

Soient A et B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice produit AB est aussi inversible et donner une formule pour son inverse.

Réponse.

Soit $Y \in R^n$ donné quelconque. On a $ABX = Y \Leftrightarrow BX = A^{-1}Y$ puisque A est inversible $\Leftrightarrow X = B^{-1}A^{-1}Y$ puisque B est aussi inversible. La matrice AB est donc inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Remarque. Pour les mêmes raisons, la composée $f \circ g$ de deux bijections f et g (linéaires ou pas) est toujours une bijection avec $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exercice 3 - *Un problème à méditer dans son bain !*

Un joaillier de Syracuse utilisait pour confectionner ses bijoux un alliage d'or et d'argent ; métaux de densités respectives 20 et 10 grammes par cm^3.

Le roi Hiéron II lui commanda une couronne de 5 kg, en exigeant que l'or en constitue au moins 90% de sa masse. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il eut une idée pour vérifier la composition de la couronne. En la plongeant dans l'eau, il constata que son volume était de 370 cm^3.

1. Que s'est alors écrié Archimède ?

2. Déterminer la matrice A qui, étant donné un bijou fabriqué par ce joaillier, applique le vecteur $X = \begin{pmatrix} \text{masse d'or} \\ \text{masse d'argent} \end{pmatrix}$ sur le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix}$.

3. En déduire un calcul de la composition de la couronne.

4. Le joaillier a-t-il intérêt à faire ses bagages rapidement ?

Réponses.

1. Eurêka ! (J'ai trouvé, en grec.)

2. D'après les données, on a :

$$\begin{cases} \text{masse totale} = \text{masse d'or} + \text{masse d'argent} \\ \text{volume total} = \dfrac{1}{20}\text{masse d'or} + \dfrac{1}{10}\text{masse d'argent} \end{cases}$$

c'est-à-dire $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/20 & 1/10 \end{pmatrix}$.

3. Comme $\det A = 1/20 \neq 0$, la matrice A est inversible avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -20 \\ -1 & 20 \end{pmatrix}$. D'où

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} \text{masse d'or} \\ \text{masse d'argent} \end{pmatrix} &= A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2 & -20 \\ -1 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2600 \\ 2400 \end{pmatrix} \text{ en grammes.} \end{aligned}$$

4. La couronne contient $2600/5000 = 52\%$ d'or. On est bien loin des 90% d'or demandés par le roi...

Exercice 4 - Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. Pour λ paramètre réel, on considère la matrice $A_\lambda = A - \lambda I$.

1. Les matrices $A_0 = A$ et A_3 sont-elles inversibles ?

2. Calculer A^2 et l'exprimer à l'aide A.

3. Pour λ et μ réels quelconques, développer le produit $A_\lambda A_\mu$ et l'exprimer à l'aide de A et I.

4. En déduire que pour $\lambda \neq 0$ et 3, la matrice A_λ est inversible et que son inverse est de la forme kA_μ pour des réels k et μ bien choisis .

Réponses.

1. On a en échelonnant $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 3$ et donc A n'est pas inversible.

De même, $\operatorname{rang} A_3 = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 2 \neq 3$ et A_3 n'est pas inversible.

2. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

3. On développe

$$A_\lambda A_\mu = (A - \lambda I)(A - \mu I) = A^2 - \lambda IA - \mu AI + \lambda\mu I^2 = (3 - \lambda - \mu)A + \lambda\mu I\,.$$

4. Soit $\lambda \neq 0$ et 3. En prenant $\mu = 3 - \lambda$, on obtient

$$A_\lambda A_{3-\lambda} = A_{3-\lambda} A_\lambda = \lambda(3-\lambda)I\,,$$

d'où A_λ est inversible et son inverse est $A_\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda(3-\lambda)} A_{3-\lambda}$.