

Correction feuille de TD 2
APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Exercice 1 - Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Quand c'est le cas, écrire leur matrice.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, y)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y + 1$
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x - z, 2x - y + z)$
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$
6. $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x, 2x, 3x)$.

Réponses.

1. Non, car $f_1(2, 2) = 4 \neq 2f_1(1, 1) = 2$ ou car $f_1(1, 1) = 1 \neq f_1(1, 0) + f_1(0, 1) = 0$.
2. Oui, $\text{Mat}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Non car $f_3(0, 0) \neq 0$.
4. Oui, $\text{Mat}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Oui, $\text{Mat}(f_5) = (1 \ 2 \ 3)$ (matrice ligne pouvant agir sur un vecteur colonne de \mathbb{R}^3).
6. Oui, $\text{Mat}(f_6) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a bien $f_6(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$.

Exercice 2 - *Application linéaire associée à une matrice.*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$ associée (X écrit en colonne). Soit $B_{can} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Où se trouvent les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ dans A ?
2. Calculer $f(x, y, z)$ de deux manières « différentes » :
 - en utilisant que $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et la linéarité de f ;
 - ou par calcul direct de AX avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Réponses.

1. Par définition, les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ se trouvent dans les trois colonnes de $A = \text{Mat}(f)$.

2. - On a par linéarité de f ,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(1, 1, 2) + y(1, 2, 2) + z(-1, 1, 2) \\ &= (x + y - z, x + 2y + z, 2x + 2y - 2z). \end{aligned}$$

- On peut faire ce calcul matriciellement, en mettant les vecteurs en colonnes

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x + 2y + z \\ 2x + 2y - 2z \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 - Exemples d'applications linéaires du plan.

Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $v = (x, y)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 .

1. Rappeler l'expression de $f(v)$ où f est l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 associée à la matrice A .

On considère dans \mathbb{R}^2 la lettre L constituée des deux segments de droite $(0, 0)$ à $(1, 0)$ et $(0, 0)$ à $(0, 2)$, et le triangle T passant par les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$.

2. Déterminer l'image de la lettre L, puis du triangle T, par les applications linéaires associées aux matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ F &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Quelles matrices sont associées à des similitudes directes, c'est-à-dire à des applications du type $f_\lambda : z = x + iy \mapsto \lambda z$ dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ avec $\lambda = a + ib = re^{i\theta}$?

Réponses.

1. On a $f(v) = (ax + cy, bx + dy)$.

2. L'idée est de calculer les images des extrémités des segments définissant les lettres, puis de relier les points par les segments correspondants. En effet, une application linéaire transforme le segment $[u, v]$ en le segment $[f(u), f(v)]$ puisque $f(tu + (1-t)v) = tf(u) + (1-t)f(v)$.

Dessins à faire en TD !

3. D'après le cours la similitude de rapport $\lambda = a + ib$ est associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Donc

- A est l'identité, qui est la similitude de rapport $\lambda = 1$,
- B est la similitude de rapport $\lambda = 2$ (homothétie de rapport 2),
- D est la similitude de rapport $\lambda = i = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2$, c'est-à-dire la rotation d'angle $\pi/2$,
- F similitude de rapport $\lambda = -1$ symétrie centrale (ou rotation d'angle π),
- I similitude de rapport $\lambda = 1/2 - i\sqrt{3}/2 = \cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3)$, c'est-à-dire la rotation d'angle $-\pi/3$,
- J similitude de rapport $\lambda = 1 - i\sqrt{3}$ est $2I$.

Exercice 4 - Une application linéaire utile.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \left(x - \frac{z}{2}, y - \frac{z}{2}\right).$$

1. Pourquoi f est-elle une application linéaire ?
2. Donner la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
3. Représenter dans \mathbb{R}^2 l'image par f des trois axes $(0x)$, $(0y)$ et $(0z)$ de \mathbb{R}^3 , l'image des arêtes du cube $C = [0, 1]^3$ de \mathbb{R}^3 , l'image d'une figure quelconque située dans un plan horizontal $z = c$.
4. Voyez-vous une utilité à cette application f ?
5. Déterminer les vecteurs $v = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 tels que $f(v) = \vec{0}$.

Réponses.

1. f est une application linéaire car les composantes de $f(v)$ sont des combinaisons linéaires des composantes de v .

2. On a $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

3. $f(0x)$ est engendré par $f(e_1) = e_1$, c'est donc encore $(0x)$.

$f(0y)$ est engendré par $f(e_2) = e_2$, c'est donc encore $(0y)$.

$f(0z)$ est engendré par $f(e_3) = (-1/2, -1/2)$, c'est donc la diagonale D d'équation $y = x$.

On trouve l'image du cube C en prenant l'image de ses sommets. (On trouve un cube vu de côté.)

On a $f(x, y, c) = (x - c/2, y - c/2) = (x, y) - (c/2, c/2)$. L'image d'une figure dans le plan $z = c$ est donc la même figure translatée de $-(c/2, c/2)$ dans le plan des (x, y) .

4. L'application f projette les objets de \mathbb{R}^3 dans le plan (comme l'ombre du soleil par exemple).

5. La direction de projection est donnée par les vecteurs $v = (x, y, z)$ tels que $f(v) = \vec{0}$. Cela donne $x = y = z/2$, d'où $v = z(1/2, 1/2, 1)$. C'est-à-dire que v est dans la droite vectorielle engendrée par $u = (1, 1, 2)$.

Exercice 5 - Produit de matrices.

1. Calculer, lorsque cela est possible, le produit AB , pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, (1 \ 2 \ 3) \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } (-1 \ 0 \ 2).$$

2. Calculer les carrés de toutes les matrices de la question 2 de l'exercice 3. Interpréter géométriquement les résultats lorsque c'est possible.

Réponses.

Rappel. Le produit AB est défini lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

1. On peut donc faire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -3 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}, \\ (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2, \quad (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-3 \ 5), \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (-1 \ 0 \ 2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.

- $A = I_2$ d'où $A^2 = I_2$.
- $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ homothétie de rapport 4 car B homothétie de rapport 2.
- $C^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car C symétrie.
- $D^2 = -I_2$ rotation d'angle π car D rotation d'angle $\pi/2$.
- $E^2 = I_2$ car E symétrie.
- $F = -I_2$ d'où $F^2 = I_2$.
- $G^2 = G$ car G projection.
- $H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $I^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ rotation d'angle $-2\pi/3$ car I rotation d'angle $-\pi/3$.
- Comme $J = 2I$ est la similitude de rapport $\lambda = 1 - i\sqrt{3} = 2(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$ on a que $J^2 = 4I^2$ est la similitude de rapport $\lambda^2 = (1 - i\sqrt{3})^2 = 4(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3))$.

Exercice 6 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice carrée A on note

$$A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ fois}}.$$

Comme le produit de matrices est associatif, on a $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$, et on utilise la convention $A^0 =$ la matrice identité lorsque A est inversible (cf feuille suivante).

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^n pour $n = 2, \dots, 7$ puis pour $n = 2019$.
2. Soit $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer R^{2020} .

Indication. On peut réfléchir à la signification géométrique de R , qui porte bien son nom ;-)

Réponses.

1. On trouve

$$P^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = PP^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

D'où $P^4 = PP^3 = -P$, $P^5 = P^2P^3 = -P^2$, $P^6 = (P^3)^2 = I_2$ et enfin $P^7 = PP^6 = P$.

Comme $P^6 = I_2$ la suite P^n est périodique de période 6, c'est-à-dire que

$$P^{n+6} = P^n.$$

Pour calculer P^{2019} , on fait la division euclidienne de 2019 par 6 : $2019 = 6 \times 336 + 3$. On a donc

$$P^{2019} = (P^6)^{336} P^3 = (I_2)^{336} P^3 = P^3 = -I_2.$$

2. On a $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, d'où

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

est la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$. R^{2020} est donc la rotation d'angle

$$2020 \times \pi/4 = 505\pi = \pi + 504\pi$$

c'est-à-dire la rotation d'angle π . Finalement, $R^{2020} = -I_2$