

Correction feuille de TD 1

COMBINAISONS LINÉAIRES, SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1 -

1. Dans \mathbb{R}^2 , pouvez-vous exprimer le vecteur $(2, 3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $(3, 0)$ et $(1, -1)$? Et un vecteur (x, y) quelconque?
2. Soient $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ et $v_3 = (3, -1, 1)$. Vérifier que v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2 .

Réponses.

1. On cherche des réels a et b tels que $a(3, 0) + b(1, -1) = (2, 3)$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ -b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow b = -3 \text{ et } a = 5/3.$$

En général, $a(3, 0) + b(1, -1) = (x, y) \Leftrightarrow b = -y$ et $a = \frac{x + y}{3}$.

2. On cherche s'il existe a et b tels que $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3 \text{ et } b = -1.$$

Exercice 2 - Dans \mathbb{R}^3 , on considère l'ensemble E des solutions de l'équation $x + 2y + 3z = 0$.

1. Donner deux vecteurs non colinéaires v_1 et v_2 de E .
2. Montrer que E est le plan vectoriel engendré par v_1 et v_2 .

Réponses.

Ce sont des techniques très utiles (et généralisables) à bien connaître! On passe ici d'un espace défini par une équation à une description avec un système générateur.

1. On peut faire $y = 1$ et $z = 0 \Rightarrow x = -2$ d'où $\vec{v}_1 = (-2, 1, 0) \in E$, puis $y = 0$ et $z = 1 \Rightarrow x = -3$ d'où $\vec{v}_2 = (-3, 0, 1) \in E$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (ils contiennent des 0 à des endroits différents).

2. Il s'agit de montrer que les vecteurs de $\vec{v} \in E$ sont les combinaisons linéaires de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . C'est facile avec les choix faits pour \vec{v}_1 et \vec{v}_2 !

En effet, on a $\vec{v} = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow \boxed{x} = -2y - 3z \Leftrightarrow$

$$\vec{v} = (-2y - 3z, y, z) = (-2y, y, 0) + (-3z, 0, z) = y\vec{v}_1 + z\vec{v}_2.$$

Exercice 3 - Méthode du pivot.

Échelonner les systèmes suivants. Donner leur rang, leurs inconnues principales et secondaires. Préciser le type de solutions (ensemble vide, solution unique, solutions dépendant de k paramètres)

et les résoudre.

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 5x - 4y + 8z = -4 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} x - 3y + z - t = 0 \\ -x + 2y - z - 2t = 1 \\ -3x + 7y - 3z - 3t = 2 \\ -x - z - 8t = 3 \end{cases}$$

Réponses.

Rappels. Le rang d'un système est le nombre d'inconnues principales (après échelonnage). On les encadrera. Les autres inconnues sont secondaires. Elles « passent à droite » dans le système et deviennent des paramètres pour les solutions, si le système en a, c'est-à-dire s'il est compatible.

$$(S_1) \begin{cases} \boxed{x} + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y = 3 \\ \boxed{-3y} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \text{ et } x = -1.$$

Ce système est de rang 2, toutes les inconnues sont principales. Il a une solution unique (système de Cramer).

$$(S_2) \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 5x - 4y + 8z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ -3y + z = -3 \\ -9y + 3z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ \boxed{-3y} + z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2, x et y inconnues principales, z secondaire. Il est compatible avec une infinité de solutions paramétrées par z :

$$y = 1 + \frac{z}{3} \quad \text{et} \quad x = 1 - y - z = -\frac{4}{3}z.$$

$$(S_3) \begin{cases} \boxed{x} - 3y + z - t = 0 \\ -x + 2y - z - 2t = 1 \\ -3x + 7y - 3z - 3t = 2 \\ -x - z - 8t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - 3y + z - t = 0 \\ -y - 3t = 1 \\ -2y - 6t = 2 \\ -3y - 9t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - 3y + z - t = 0 \\ \boxed{-y} - 3t = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2, x et y inconnues principales, z et t secondaires. Il est compatible avec une infinité de solutions paramétrées par z et t :

$$y = -1 - 3t \quad \text{et} \quad x = 3y - z + t = -3 - z - 8t.$$

Exercice 4 - Peut-on trouver un réel t tel que le vecteur $v = (1, 3t, t)$ soit combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 3, 2)$ et $v_2 = (-1, 1, -1)$? Interpréter géométriquement ce résultat.

Réponse.

On cherche a et b tels que $av_1 + bv_2 = v \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 3a + b = 3t \\ 2a - b = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} - b = 1 \\ 4b = 3t - 3 \\ b = t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} - b = 1 \\ \boxed{b} = t - 2 \\ 0 = -t + 5 \end{cases}$$

Ce système a une solution ssi $t = 5$. Cela signifie que v (qui décrit une droite affine lorsque t varie) est dans le plan engendré par v_1 et v_2 lorsque $t = 5$.

Exercice 5 - Équation cartésienne d'un plan.

Soient $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 2, 3)$.

1. Pour $v = (x, y, z)$ donné quelconque, traduire l'équation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v$ en un système linéaire (S) aux inconnues λ_1 et λ_2 .
2. Échelonner ce système et en déduire une équation cartésienne du plan P engendré par v_1 et v_2 .

Réponses.

Une autre technique importante et généralisable à bien connaître. Ici, on cherche à passer d'un espace décrit par une famille génératrice à son (ses) équations cartésiennes.

1. On a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v \Leftrightarrow$

$$(S) \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = z \end{cases}$$

2. On échelonne

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y - x \\ 2\lambda_2 = z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 = x \\ \boxed{\lambda_2} = y - x \\ 0 = z - x - 2(y - x) = x - 2y + z \end{cases}$$

3. Le vecteur v appartient à P ssi le système (S) a une solution (v donné et λ_1 et λ_2 inconnues). Cela se passe ssi il est compatible, c'est-à-dire $x - 2y + z = 0$. C'est l'équation de P .

Exercice 6 - Droite définie par équations cartésiennes.

Montrer que la partie $D = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0 = x + y + z\}$ est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur.

Réponse.

On échelonne et résout le système $v \in D \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z = 0 \\ \boxed{-y} - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z = z \\ y = -2z \\ z \text{ quelconque.} \end{cases} \\ \Leftrightarrow v = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1).$$

D est donc la droite vectorielle engendrée par $u = (1, -2, 1)$.

Exercice 7 - Conditions de compatibilité et systèmes d'équations cartésiennes d'un plan de \mathbb{R}^4 .

Dans \mathbb{R}^4 , on considère le plan $P = \text{Vect}(v, w)$ engendré par les vecteurs

$$v = (1, 2, -3, 1) \quad \text{et} \quad w = (1, -1, 1, -3).$$

1. Montrer qu'un vecteur $u = (x, y, z, t)$ de \mathbb{R}^4 est dans P ssi un certain système linéaire (S_u) est compatible.
2. Échelonner ce système et montrer qu'il est compatible ssi $u = (x, y, z, t)$ est solution d'un certain système linéaire homogène (S) .

3. En déduire un système d'équations cartésiennes de P .

Réponses.

1. $u \in P$ ssi il existe a et b tels que $u = av + bw \Leftrightarrow$

$$(S_u) \begin{cases} a + b = x \\ 2a - b = y \\ -3a + b = z \\ a - 3b = t \end{cases}$$

2. On a $(S_u) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{a} + b = x \\ -3b = y - 2x \\ 4b = z + 3x \\ -4b = t - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + b = x \\ \boxed{-3b} = y - 2x \\ 0 = z + 3x + \frac{4}{3}y - \frac{8}{3}x = z + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y \\ 0 = t - x - \frac{4}{3}y + \frac{8}{3}x = t + \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y \end{cases}$$

(S_u) possède donc une solution ssi

$$(S) \begin{cases} x + 4y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + 3t = 0 \end{cases}$$

3. Le vecteur v est dans P ssi le système (S_u) est compatible c'est-à-dire si les coordonnées de v satisfont les conditions de compatibilité (S) . Le système (S) est donc un système d'équations cartésiennes de P .

Remarque. Ici dans \mathbb{R}^4 il faut deux équations cartésiennes pour définir un plan, et non plus une seule comme dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 8 - Dans \mathbb{R}^4 , on considère l'ensemble P des vecteurs $v = (x, y, z, t)$ satisfaisant

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases}$$

Résoudre (S) et en déduire que P est un plan de \mathbb{R}^4 dont on donnera deux vecteurs générateurs.

Réponse.

On fait ici l'opération inverse de l'exercice précédent. On va passer d'un espace défini par un système d'équations cartésiennes à une description par famille génératrice.

On a $(S) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z + 4t = 0 \\ -y - 4z - 5t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = -2y - 3z - 4t = 5z + 6t \\ \boxed{y} = -4z - 5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v = (5z + 6t, -4z - 5t, z, t)$$

$$\Leftrightarrow v = z(5, -4, 1, 0) + t(6, -5, 0, 1).$$

P est donc le plan vectoriel engendré par $v_1 = (5, -4, 1, 0)$ et $v_2 = (6, -5, 0, 1)$ (non colinéaires).

Exercice 9 - *Quiz*.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Pourquoi?

- a) Si un système a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.
- b) Si un système n'a aucune solution, alors il a plus d'équations que d'inconnues.
- c) Si un système a une solution unique, alors il a autant d'équations que d'inconnues.
- d) Si le rang d'un système est égal au nombre d'équations, alors il possède au moins une solution.
- e) Si le rang d'un système est égal au nombre d'inconnues, alors il possède au plus une solution.

Réponses.

- a) Non, il peut être incompatible. Par exemple,

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

- b) Non, par exemple le système précédent de 4 inconnues et 3 équations n'a aucune solution.
- c) Non, il peut y avoir des équations « inutiles » de trop (comme des équations de compatibilité satisfaites). Par exemple,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

- d) Oui car alors il est compatible. Il n'a pas d'équations de compatibilité.
- e) Oui car il n'y a pas d'inconnues non principales servant de paramètre pour les solutions. Ce genre de système peut avoir une solution ou aucune s'il est incompatible.

En conclusion, c'est la comparaison du **rang** d'un système au nombre d'équations ou d'inconnues qui permet d'avoir des renseignements généraux sur le nombre de solutions.