Partiel du 23 février 2026

Durée 2h

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Exercice 1 - Échelonner et résoudre les systèmes suivants (en donner toutes les solutions s'il y en a) :

$$(S_1)\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -x+y+z=1 \\ 3x+y-3z=1 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+4y+5z=4 \end{cases}$$

Exercice 2 - Montrer que l'ensemble

$$D=\{v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,\ x-2y+z=0=x-y-z\}$$

est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur u.

Exercice 3 - Soit $A=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ et $f: X\mapsto AX$ l'application linéaire $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ associée.

1. Calculer $f(X)$ pour $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

2. Montrer que pour tout $X\in\mathbb{R}^2$, $f(X)$ appartient à la droite vectorielle D engendrée par $u=(-2,1)$. L'application f est-elle surjective ?

3. Pour m réel donné, déterminer l'image par f de la droite affine Δ_m passant par $(m,0)$ et de direction $v=(3,-1)$. L'application f est-elle injective ?

4. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur $f\circ f$?

Exercice 4 - On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 4\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits de deux matrices parmi A, B, C qu'il est possible de faire ? Calculer tous ces produits.

Exercice 5 - Pour a paramètre réel, on pose $M_a=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$.

Pour quels nombres a la matrice M_a est-elle inversible ? Calculer son inverse dans ce cas.

Exercice 6 - On note $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. Donner une matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I_2$.

2. Donner une matrice $B\in M_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2=I_2$ avec $B\neq I_2$ et $B\neq -I_2$.

3. Donner une matrice $C\in M_2(R)$ telle que $C^3=I_2$ avec $C\neq I_2$.