Partiel du 3 mars 2025

Durée 2h

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Exercice 1 - Pour m paramètre réel donné, on considère le système

$$(S_m)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+4y+5z=m \end{cases}$$

1. Calculer le rang de (S_m). Discuter suivant la valeur de m l'existence ou non de solution de (S_m).

2. Déterminer suivant la valeur de m toutes les solutions de (S_m), lorsqu'elles existent.

Exercice 2 - On considère le plan P de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1=(1,1,1,1) \quad \text{et} \quad v_2=(1,2,3,4).$$

Existe-t-il un réel t tel que le vecteur $v=(2,0,-2,t)$ appartienne à P ? (Justifier.)

Exercice 3 - On note $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ et on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1)=e_1-e_2\ , \quad f(e_2)=e_2-e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3)=e_3-e_1\ .$$

1. Donner la matrice A de f et calculer l'image $f(u)$ d'un vecteur $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ quelconque.

2. Calculer le rang de A. L'application f est-elle un isomorphisme ?

3. Résoudre l'équation $f(u)=0$. L'application f est-elle injective ? (Justifier.)

4. À quelle condition portant sur $v=(x',y',z')$ l'équation $f(u)=v$ possède-t-elle au moins une solution $u=(x,y,z)$? L'application f est-elle surjective ? (Justifier.)

Exercice 4 - On considère les deux matrices $L=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\in M_{1,2}(\mathbb{R})$ et $V=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer LV, $N=VL$ et N^2.

On note désormais $M=I_2+N$ avec $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

2. Exprimer M^2 puis M^3 comme des combinaisons linéaires de I_2 et N.

3. Montrer plus généralement que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la matrice M^n s'écrit $M^n=a_nI_2+b_nN$ avec des nombres a_n et b_n à déterminer. *Indication.* Après avoir deviné la formule générale à l'aide de la question 2, on pourra la démontrer par récurrence sur n.

Exercice 5 - Soit $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-7&4\end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2. Trouver des matrices B_1 et B_2 telles que

$$AB_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_2A=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\ .$$