

Partiel du 4 mars 2024

DURÉE 2H

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 - Échelonner et résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 2 - Montrer que

$$D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 = x + 2y + 3z + 4t = x + 3y + 4z + 5t\}$$

est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur u .

Exercice 3 - On s'intéresse au problème suivant : **étant donnés** 5 nombres réels L_1, L_2, C_1, C_2, C_3 , trouver une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ dont les sommes de chaque ligne et colonne soient ces nombres $L_1 = a + b + c$, $L_2 = d + e + f$, $C_1 = a + d$, $C_2 = b + e$, $C_3 = c + f$.

1. Ce problème peut-il avoir, pour certaines valeurs de L_1, L_2, C_1, C_2, C_3 , une unique solution ? (Justifier.)
2. Ce problème a-t-il toujours au moins une solution ? *Indication.* Considérer $L_1 + L_2$ et $C_1 + C_2 + C_3$.

Exercice 4 - Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 associé.

1. Calculer $f(X)$ pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^2 . Que vaut $(f \circ f)(X)$?
3. Déterminer l'image par f de la droite vectorielle D engendrée par $u = (1, 2)$.
4. Déterminer l'image par f de la droite affine Δ passant par $e_1 = (1, 0)$ et de direction $v = (1, 1)$.

Exercice 5 - Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer, lorsque c'est possible, les produits A^2 , B^2 , AB et BA .
2. Que vaut $BABA$?

Exercice 6 - Pour t paramètre réel, on considère la matrice

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels t la matrice M_t est-elle inversible ? Calculer son inverse $(M_t)^{-1}$ dans ce cas.
2. Calculer le produit $M_t \cdot M_{t'}$.
3. En déduire un calcul de $(M_1)^{2024}$. (Justifier.)