Examen du 5 mai 2025

DURÉE 2H

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Exercice 1 - Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1,1,1)\,,\ v_2 = (1,2,3)\,,\ v_3 = (-1,1,3)\,,\ v_4 = (0,1,2)\,.$$

La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle libre ? Quel est son rang ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. (Justifier les réponses.)

Exercice 2 - Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le rang de f et donner une base de l'image de f. L'application f est-elle surjective ?

2. Que vaut $\dim \ker f$? L'application f est-elle injective ? Déterminer une base du noyau de f si cet espace n'est pas nul.

3. Les espaces $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont-ils supplémentaires ? (Justifier.)

4. Déduire de ce qui précède qu'il existe une base $B' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle on a $\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est la signification géométrique précise de f ?

5. On note I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. Que valent A^{2025} et $(I_3 - A)^{2025}$? (Justifier.)

Exercice 3 - On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 1)$.

1. Vérifier que $B' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer les coordonnées de $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ dans cette base.

Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = -v_2$.

2. Donner la matrice A' de f dans la base B'. Que représente géométriquement f ?

3. Calculer à l'aide de 1, et de la définition de f, les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Exprimer d'abord les résultats en fonction de v_1 et v_2, puis à l'aide de e_1 et e_2.

4. En déduire la matrice A de f dans la base canonique $B_{can} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Que vaut A^2 ?

Exercice 4 - On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

2. Montrer que A est diagonalisable et trouver une base $B = (u_1, u_2)$ de diagonalisation.

3. On considère la suite de vecteurs définie par $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X(n+1) = AX(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer $X(n)$.