

**Examen du 14 mai 2024**

DURÉE 2H

*La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

**Exercice 1** - Déterminer la dimension et une base du sev  $E$  de  $\mathbb{R}^4$  défini par

$$E = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y + 3z - 4t = 0\}.$$

**Exercice 2** - On considère les deux vecteurs  $v_1 = (1, 2)$  et  $v_2 = (1, 3)$  de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $B_{can} = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Vérifier que  $B = (v_1, v_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Donner la matrice de passage  $P$  de  $B_{can}$  à  $B$ . Calculer  $P^{-1}$ . Quelles sont les coordonnées de  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$  dans  $B$  ?

Soit  $p$  la projection sur la droite  $D_1$  engendrée par  $v_1$  le long de  $D_2$  engendrée par  $v_2$ .

2. Que valent  $p(v_1)$  et  $p(v_2)$  ? Quelle est la matrice  $M$  de  $p$  dans la base  $B = (v_1, v_2)$  ?

3. Soit  $N$  la matrice de  $p$  dans la base canonique. Quelle est la relation entre  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $P^{-1}$  ?

4. En déduire un calcul de  $N$ . Que vaut  $N^2$  ?

**Exercice 3** - Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice identité de  $M_3(\mathbb{R})$ . Pour  $\lambda$  paramètre réel, on note  $A_\lambda = A - \lambda I$ .

1. Calculer les rangs de  $A_0 (= A)$  et  $A_3$ .

2. Les matrices  $A$  et  $A_3$  sont-elles inversibles ? Sinon, donner des bases de  $\ker A$  et  $\ker A_3$ .

3. Déduire de ces calculs que l'on peut trouver une base  $B = (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de l'application linéaire  $f$  associée à  $A$  s'écrit  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

4. La matrice  $A_\lambda$  est-elle inversible pour  $\lambda \neq 0$  et  $3$  ? (On pourra raisonner dans la base  $B$ .)

**Exercice 4** - Pour  $a$  paramètre réel donné, on considère la matrice  $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ .

1. Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $M_a$  est-elle diagonalisable dans  $M_2(\mathbb{R})$  ?

2. On suppose désormais que  $|a| < 2$  et on écrit  $a = 2 \cos \theta$  pour un  $\theta \in ]0, \pi[$ .

Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de l'application linéaire  $f_a$  associée à  $M_a$  s'écrit  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  (on ne demande pas de déterminer cette base).

Que vaut  $(R_\theta)^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ?

3. On considère une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant  $u_{n+2} = au_{n+1} - u_n$  avec  $a = 2 \cos \theta$  et  $\theta \in ]0, \pi[$ .

Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe des réels  $C_1$  et  $C_2$  tels que

$$u_n = C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta).$$